Stabilisation de la formule des traces tordue VII: descente globale

Jean-Loup Waldspurger

Stabilisation de la formule des traces tordue VII : descente globale

J.-L. Waldspurger

2 septembre 2014

Introduction

Nous commençons la preuve des théorèmes [VI] 5.2 et [VI] 5.4. Rappelons-en les énoncés, en renvoyant à [VI] pour les définitions. Le triplet $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$ est défini sur un corps de nombres F. On fixe un ensemble fini V de places de F contenant l'ensemble V_{ram} des "mauvaises" places.

Théorème [VI] 5.2 (à prouver). *On suppose $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$ quasi-déployé et à torsion intérieure. Soit $\mathcal{O}_V$ une classe de conjugaison stable semi-simple dans $\tilde{G}(F_V)$. Alors $SA^{\tilde{G}}(V, \mathcal{O}_V)$ est stable.*

Théorème [VI] 5.4 (à prouver). *Soit $\mathcal{O}_V$ une classe de conjugaison stable semi-simple dans $\tilde{G}(F_V)$. Alors on a l'égalité $A^{\tilde{G},\mathcal{E}}(V, \mathcal{O}_V, \omega) = A^{\tilde{G}}(V, \mathcal{O}_V, \omega)$.*

Dans cet article, nous prouverons le premier théorème. Nous prouverons aussi le second sauf pour certains triplets $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$ particuliers. Pour ceux-ci, nous le prouverons sauf pour un nombre fini de classes $\mathcal{O}_V$ exceptionnelles. On renvoie à 3.5 pour des assertions précises. Les cas restants de ce théorème seront prouvés plus tard en utilisant la formule des traces.

On introduit en 1.1 un ensemble de paramètres $\mathbf{Stab}(\tilde{G}(F))$. On définit en 1.2 une application qui, à une classe de conjugaison stable semi-simple dans $\tilde{G}(F)$, associe un élément de notre ensemble de paramètres. Cette application est toujours injective. En général, elle n'est pas surjective. Elle l'est toutefois si $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$ est quasi-déployé et à torsion intérieure. La question de savoir si un paramètre provient bel et bien d'une classe de conjugaison stable semi-simple est délicate et nous ne la résoudrons pas. L'intérêt d'introduire cet ensemble de paramètres est justement de la contourner. Si $\mathbf{G}' = (G', \mathcal{G}', \tilde{s})$ est une donnée endoscopique de $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$, la correspondance entre classes de conjugaison stable semi-simples dans $\tilde{G}'(F)$ et $\tilde{G}(F)$ est compliquée précisément parce qu'il y a des classes dans $\tilde{G}'(F)$ qui ne correspondent à rien dans $\tilde{G}(F)$. Mais cette correspondance se traduit par une véritable application $\mathbf{Stab}(\tilde{G}'(F)) \to \mathbf{Stab}(\tilde{G}(F))$ entre ensembles de paramètres.

On énonce dans la section 3 de nouveaux théorèmes qui sont pour l'essentiel des reformulations des théorèmes ci-dessus. Mais les données sont cette fois un élément $\mathcal{X}$ de $\mathbf{Stab}(\tilde{G}(F))$ et un ensemble fini de places V. Ces données sont indépendantes l'une de l'autre. Pour $\mathcal{X}$ fixé, on peut faire varier V. On prouve dans la section 2 des formules de scindage qui entraînent que, si les théorèmes sont vérifiés pour V grand (cette notion dépendant de $\mathcal{X}$), alors ils le sont pour tout V. Les résultats de cette section 2 s'appuient sur le lemme fondamental pondéré tordu dû à Chaudouard et Laumon (cf. [CL] ; fâcheusement, ces auteurs n'ont pas encore publié la preuve complète annoncée dans cette référence). Ils s'appuient aussi sur une version tordue d'un argument d'annulation dû à Kottwitz.

Les sections 4 à 8 sont consacrées à la preuve des théorèmes de la section 3 pour un paramètre $\mathcal{X}$ et un ensemble de places V assez grand. Cette hypothèse sur V entraîne que toutes les distributions intervenant se calculent par la méthode de descente d'Harish-Chandra. Cela nous ramène à deux problèmes. D'abord, la méthode de descente appliquée globalement, c'est-à-dire sur F, fait intervenir une combinatoire compliquée contrôlée par divers groupes de cohomologie. Dans notre situation tordue, il s'agit de cohomologie de complexes de tores. Fort heureusement, cette combinatoire a été entièrement élucidée par Labesse dans une série d'articles (cf. [Lab1], [Lab2], [Lab3]). On est alors ramené à des problèmes similaires aux problèmes initiaux, mais dans une situation non tordue et pour des distributions à support unipotent. Puisque la situation n'est plus tordue, on peut utiliser les résultats d'Arthur ([A1]). Cela ne suffit toutefois pas car la descente d'Harish-Chandra appliquée au cas tordu fait inévitablement intervenir un phénomène qui ne se produit pas dans le cas non tordu : il apparaît des triplets endoscopiques non standard. Pour ceux-ci, on utilise le théorème [VI] 5.6 qui permet d'achever la preuve. Bien sûr, ce dernier théorème n'est pas encore prouvé. Toutefois, les hypothèses de récurrence sophistiquées que l'on a posées en [VI] 5.8 permettent de l'appliquer, sauf dans quelques cas particuliers. Cette restriction est précisément la raison pour laquelle la démonstration du théorème [VI] 5.4 restera incomplète.

Dans la section 9, nous prouverons le théorème [VI] 5.6. La preuve est la même que ci-dessus, mais inversée. Ci-dessus, on déduit le théorème [VI] 5.4 du théorème [VI] 5.6. Maintenant, on déduit le théorème [VI] 5.6 du théorème [VI] 5.4. Les hypothèses de récurence assurent cette fois que ce théorème est valide pour les triplets $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$ que nous utiliserons. Il faut toutefois prendre garde que, toutes ces démonstrations se faisant par récurrence, elles ne deviendront de vraies démonstrations que quand tous les pas de la récurrence auront été traités. Comme on l'expliquera davantage en 3.7, il suffira pour cela d'achever la preuve du théorème [VI] 5.4.

Comme on le voit, notre preuve suit de très près celle d'Arthur dans son deuxième article sur la stabilisation ([A2]). Il s'agissait seulement d'y insérer les idées de Labesse afin de l'adapter à la situation tordue.

J'ai reçu l'aide de C. Moeglin pour la section 2. Je l'en remercie.

1 Coefficients globaux et classes de conjugaison stable

1.1 Ensemble de paramètres

Pour tout l'article, sauf mention expresse du contraire, F est un corps de nombres, G est un groupe réductif connexe défini sur F, $\tilde{G}$ est un espace tordu sous G défini sur F et $\mathbf{a}$ est un élément de $H^1(W_F; Z(\hat{G}))/ker^1(W_F; Z(\hat{G}))$. On utilise les définitions de [VI] 1.1 et on adjoint au triplet $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$ diverses données supplémentaires comme dans cette référence.

Considérons <u>la</u> paire de Borel épinglée $\mathcal{E}^*=(B^*,T^*,(E^*_\alpha)_{\alpha\in\Delta})$ de G. Elle est munie de l'action galoisienne quasi-déployée, notée $\sigma\mapsto\sigma_{G^*}$, cf. [I] 1.2. Elle est aussi munie d'un automorphisme θ^* qui commute à l'action galoisienne. On note $\Sigma(T^*)$ l'ensemble des racines de T^* dans $\mathfrak{g}$. Pour $\alpha\in\Sigma(T^*)$, on note α_{res} sa restriction à $T^{*,\theta^*,0}$ et on pose $\Sigma(T^*)_{res}=\{\alpha_{res};\alpha\in\Sigma(T^*)\}$. On note $\Sigma_+(T^*)$ et $\Sigma_{res,+}(T^*)$ les sous-ensembles positifs déterminés par B^*. Pour $\alpha\in\Sigma(T^*)$, on note $N\alpha$ la somme des éléments de l'orbite de α sous l'action du groupe d'automorphismes engendré par θ^*. Ce caractère de T^* se descend en un caractère de $T^*/(1-\theta^*)(T^*)$.

Soit $\mu\in(T^*/(1-\theta^*)(T^*))\times_{\mathcal{Z}(G)}\mathcal{Z}(\tilde{G})$ (cf. [I] 1.2 pour la définition de $\mathcal{Z}(\tilde{G})$), fixons $\nu\in T^*$ et $\bar{e}\in\mathcal{Z}(\tilde{G})$ de sorte que μ soit l'image de $(\nu,\bar{e})$. On note $\Sigma(\mu)$ l'ensemble des α_{res} pour $\alpha\in\Sigma(T^*)$ vérifiant l'une des conditions suivantes

- α est de type 1 ou 2 et $(N\alpha)(\nu)=1$;

- α est de type 3 et $(N\alpha)(\nu)=-1$.

Cet ensemble s'interprète de la façon suivante. Identifions $\mathcal{E}^*$ à une paire de Borel épinglée particulière de G et relevons $\bar{e}$ en un élément $e\in Z(\tilde{G},\mathcal{E}^*)$. Posons $\eta=\nu e\in\tilde{G}$, $\bar{G}=G_\eta$, $\bar{B}=\bar{G}\cap B^*$ et $\bar{T}=T^{*,\theta^*,0}$. Alors $\Sigma(\mu)$ est l'ensemble des racines $\Sigma^{\bar{G}}(\bar{T})$ de $\bar{T}$ dans $\bar{\mathfrak{g}}$. En particulier, $\Sigma(\mu)$ est un honnête système de racines et $\Sigma_+(\mu)=\Sigma(\mu)\cap\Sigma_{res,+}(T^*)$ est le sous-ensemble positif associé à $\bar{B}$. On introduit le groupe de Weyl $W(\mu)$ de $\Sigma(\mu)$, c'est-à-dire le sous-groupe de W^{θ^*} engendré par les symétries relatives aux $\alpha_{res}\in\Sigma(\mu)$. C'est aussi le groupe de Weyl $W^{\bar{G}}$ du groupe $\bar{G}$.

Le groupe W^{θ^*} agit sur $(T^*/(1-\theta^*)(T^*))\times_{\mathcal{Z}(G)}\mathcal{Z}(\tilde{G})$ par l'action naturelle sur le premier facteur et par l'action triviale sur le second. Tous les objets sont munis de l'action galoisienne quasi-déployée. Pour un cocycle $\omega_{\bar{G}}:\Gamma_F\to W^{\theta^*}$, considérons les conditions

(1) $\omega_{\bar{G}}(\sigma)\sigma_{G^*}$ fixe μ pour tout $\sigma\in\Gamma_F$;

(2) $\omega_{\bar{G}}(\sigma)\sigma_{G^*}$ fixe μ et conserve $\Sigma_+(\mu)$ pour tout $\sigma\in\Gamma_F$.

Remarquons que la condition (1) implique en tout cas que $\omega_{\bar{G}}(\sigma)\sigma_{G^*}$ conserve $\Sigma(\mu)$ pour tout $\sigma\in\Gamma_F$. On note $\underline{Stab}(\tilde{G}(F))$ l'ensemble des couples $(\mu,\omega_{\bar{G}})$ tels que $\omega_{\bar{G}}$ vérifie (1) et $Stab(\tilde{G}(F))$ celui des couples $(\mu,\omega_{\bar{G}})$ tels que $\omega_{\bar{G}}$ vérifie (2). Disons que deux éléments $(\mu,\omega_{\bar{G}})$ et $(\mu',\omega_{\bar{G}'})$ de $\underline{Stab}(\tilde{G}(F))$ sont équivalents si et seulement si $\mu=\mu'$ et $\omega_{\bar{G}'}(\sigma)\in W(\mu)\omega_{\bar{G}}(\sigma)$ pour tout $\sigma\in\Gamma_F$. On a

(3) $Stab(\tilde{G}(F))$ est un ensemble de représentants des classes d'équivalence dans $\underline{Stab}(\tilde{G}(F))$.

Preuve. Pour $(\mu,\omega_{\bar{G}})\in\underline{Stab}(\tilde{G}(F))$ et $\sigma\in\Gamma_F$, il existe un unique $u(\sigma)\in W(\mu)$ tel que $u(\sigma)\omega_{\bar{G}}(\sigma)\sigma_{G^*}$ conserve $\Sigma_+(\mu)$. Posons $\omega'_{\bar{G}}(\sigma)=u(\sigma)\omega_{\bar{G}}(\sigma)$. L'unicité de $u(\sigma)$ entraîne facilement que $\omega'_{\bar{G}}$ est encore un cocycle. Alors $(\mu,\omega'_{\bar{G}})$ est un élément de $Stab(\tilde{G}(F))$ qui est équivalent à $(\mu,\omega_{\bar{G}})$. D'autre part, il est immédiat que deux éléments de $Stab(\tilde{G}(F))$ sont équivalent si et seulement s'ils sont égaux. D'où (3). $\square$

Le groupe W^{θ^*} agit sur $\underline{Stab}(\tilde{G}(F))$ de la façon suivante. Pour $(\mu,\omega_{\bar{G}})\in\underline{Stab}(\tilde{G}(F))$ et $w\in W^{\theta^*}$, l'image de $(\mu,\omega_{\bar{G}})$ par w est le couple $(\mu',\omega_{\bar{G}'})$ défini par $\mu'=w(\mu)$ et $\omega_{\bar{G}'}(\sigma)=w\omega_{\bar{G}}(\sigma)\sigma_{G^*}(w^{-1})$ pour tout σ. Cette action respecte la relation d'équivalence introduite ci-dessus. Montrons que

(4) soient $(\mu,\omega_{\bar{G}})$ et $(\mu',\omega_{\bar{G}'})$ deux éléments de $Stab(\tilde{G}(F))$; alors les trois conditions suivantes sont équivalentes :

(i) il existe $w\in W^{\theta^*}$ tel que $(\mu',\omega_{\bar{G}'})=w(\mu,\omega_{\bar{G}})$;

(ii) il existe $w\in W^{\theta^*}$ tel que $(\mu',\omega_{\bar{G}'})=w(\mu,\omega_{\bar{G}})$ et $w(\Sigma_+(\mu))=\Sigma_+(\mu')$;

(iii) il existe $w\in W^{\theta^*}$ tel que $(\mu',\omega_{\bar{G}'})$ et $w(\mu,\omega_{\bar{G}})$ soient équivalents dans $\underline{Stab}(\tilde{G}(F))$.

Preuve. Evidemment, (ii) entraîne (i) et (i) entraîne (iii). Soit w vérifiant (iii). On a $w(\mu)=\mu'$ donc w envoie $\Sigma(\mu)$ dans $\Sigma(\mu')$. Il existe un unique $u\in W(\mu')$ tel que uw

envoie $\Sigma_+(\mu)$ dans $\Sigma_+(\mu')$. Il est clair que $(\mu',\omega_{\bar{G}'})$ et $u(\mu',\omega_{\bar{G}'})$ sont équivalents. Puisque $(\mu',\omega_{\bar{G}'})$ et $w(\mu,\omega_{\bar{G}})$ sont équivalents et que l'action de W^{θ^*} conserve l'équivalence, $u(\mu',\omega_{\bar{G}'})$ et $uw(\mu,\omega_{\bar{G}})$ sont équivalents. Donc aussi $(\mu',\omega_{\bar{G}'})$ et $uw(\mu,\omega_{\bar{G}})$. On peut donc remplacer w par uw, la condition (iii) reste vérifiée et maintenant, w envoie $\Sigma_+(\mu)$ dans $\Sigma_+(\mu')$. On voit que cette dernière conditon implique que $w(\mu,\omega_{\bar{G}})$ vérifie (2), donc appartient à $Stab(\tilde{G}(F))$. Alors $(\mu',\omega_{\bar{G}'})$ et $w(\mu,\omega_{\bar{G}})$ sont deux éléments équivalents de $Stab(\tilde{G}(F))$. Ils sont donc égaux et la conclusion de (ii) est vérifiée. $\square$

Pour deux éléments $(\mu,\omega_{\bar{G}}),(\mu',\omega_{\bar{G}'})\in Stab(\tilde{G}(F))$, on dit qu'ils sont conjugués si et seulement s'ils vérifient les trois conditions équivalentes ci-dessus. On note $\mathbf{Stab}(\tilde{G}(F))$ l'ensemble des classes de conjugaison. Cet ensemble est en bijection avec celui des classes de conjugaison par W^{θ^*} dans $\underline{Stab}(\tilde{G}(F))$.

Soit $(\mu,\omega_{\bar{G}})\in Stab(\tilde{G}(F))$. Comme plus haut, relevons μ en un élément $\eta\in\tilde{G}$ et définissons le groupe $\bar{G}$. Complétons la paire de Borel $(\bar{B},\bar{T})$ de $\bar{G}$ en une paire de Borel épinglée. Alors il existe une unique action de Γ_F sur $\bar{G}$ qui conserve cette paire de Borel épinglée, de sorte que cette action et l'action $\sigma\mapsto\omega_{\bar{G}}(\sigma)\sigma_{G^*}$ coïncident sur $\bar{T}=T^{*,\theta^*,0}$ et induisent la même action sur $\Sigma_+(\mu)$. On note cette action $\sigma\mapsto\sigma_{\bar{G}}$. Pour celle-ci, $\bar{G}$ est quasi-déployé. Le centre $Z(\bar{G})$ est indépendant du relèvement η : c'est le sous-groupe des $x\in T^{*,\theta^*,0}$ tels que $\alpha_{res}(x)=1$ pour tout $\alpha_{res}\in\Sigma(\mu)$. L'action galoisienne sur ce centre est $\sigma\mapsto\omega_{\bar{G}}(\sigma)\sigma_{G^*}$. On dit que $(\mu,\omega_{\bar{G}})$ est elliptique si et seulement si on a l'égalité $Z(\bar{G})^{\Gamma_F,0}=Z(G)^{\Gamma_F,\theta,0}$ (on note simplement θ la restriction de θ^* à $Z(G)$, ce qui est justifié par le fait que c'est aussi la restriction de $ad_g\circ\theta^*$ pour tout $g\in G$). Cette propriété est conservée par conjugaison. On note $Stab_{ell}(\tilde{G}(F))$ le sous-ensemble des éléments elliptiques de $Stab(\tilde{G}(F))$ et $\mathbf{Stab}_{ell}(\tilde{G}(F))$ l'ensemble des classes de conjugaison dans ce sous-ensemble.

1.2 Classes de conjugaison stable semi-simples

Rappelons que l'on note $\tilde{G}_{ss}$ l'ensemble des éléments semi-simples de $\tilde{G}$. Pour $\eta\in\tilde{G}_{ss}$, on pose $I_\eta=Z(G)^\theta G_\eta$. Pour $\eta\in\tilde{G}_{ss}(F)$, on note $\mathcal{Y}_\eta$ l'ensemble des $y\in G(\bar{F})$ tels que $y\sigma(y)^{-1}\in I_\eta=I_\eta(\bar{F})$ pour tout $\sigma\in\Gamma_F$. On dit que deux éléments $\eta,\eta'\in\tilde{G}_{ss}(F)$ sont stablement conjugués si et seulement s'il existe $y\in\mathcal{Y}_\eta$ tel que $y^{-1}\eta y=\eta'$.

Soit $\eta\in\tilde{G}_{ss}(F)$. Fixons une paire de Borel (B,T) de G conservée par ad_η. Complétons cette paire en une paire de Borel épinglée $\mathcal{E}=(B,T,(E_\alpha)_{\alpha\in\Delta})$. Fixons $e\in Z(\tilde{G},\mathcal{E})$ et posons $\theta=ad_e$. On introduit une cochaîne $u_{\mathcal{E}}:\Gamma_F\to G_{SC}$ de sorte que $ad_{u_{\mathcal{E}}(\sigma)}\circ\sigma$ conserve $\mathcal{E}$ pour tout $\sigma\in\Gamma_F$. L'action galoisienne naturelle fixe η donc conserve G_η. Le couple $(B\cap G_\eta,T^{\theta,0})$ est une paire de Borel de G_η. On peut choisir une cochaîne $u_\eta:\Gamma_F\to G_{SC,\eta}$ ($G_{SC,\eta}$ est le groupe des points fixes de ad_η dans G_{SC}) de sorte que $ad_{u_\eta(\sigma)}\circ\sigma$ conserve cette paire de Borel pour tout $\sigma\in\Gamma_F$. Posons $v_\eta(\sigma)=u_\eta(\sigma)u_{\mathcal{E}}(\sigma)^{-1}$. On a

(1) pour tout $\sigma\in\Gamma_F$, $v_\eta(\sigma)$ normalise T et son image dans W est fixe par θ.

Preuve. On a $ad_{v_\eta(\sigma)}=(ad_{u_\eta(\sigma)}\circ\sigma)(ad_{u_{\mathcal{E}}(\sigma)}\circ\sigma)^{-1}$. Les deux facteurs conservent T, donc $ad_{v_\eta(\sigma)}$ aussi. Pour la seconde assertion, on doit montrer qu'il existe $t(\sigma)\in T$ de sorte que $\theta^{-1}ad_{v_\eta(\sigma)}\theta=ad_{t(\sigma)}ad_{v_\eta(\sigma)}$. Il suffit de vérifier la même assertion pour chacun des facteurs $ad_{u_\eta(\sigma)}\circ\sigma$ et $ad_{u_{\mathcal{E}}(\sigma)}\circ\sigma$. Pour le deuxième, c'est clair : il commute à θ. Pour le premier, on écrit $\eta=\nu e$ avec $\nu\in T$. Alors $\theta=ad_e=ad_\nu^{-1}ad_\eta$. Le terme ad_η commute à $ad_{u_\eta(\sigma)}\circ\sigma$ car η est fixe par σ et $u_\eta(\sigma)\in G_\eta$. Le terme ad_ν^{-1} ne commute pas à $ad_{u_\eta(\sigma)}\circ\sigma$ mais vérifie la relation plus faible que l'on souhaite simplement parce que $ad_{u_\eta(\sigma)}\circ\sigma$ normalise T. $\square$

Ecrivons comme ci-dessus $\eta=\nu e$, avec $\nu\in T$. Notons μ_η l'image de (ν,e) par les applications

$$T\times Z(\tilde{G},\mathcal{E})\to (T/(1-\theta)(T))\times_{\mathcal{Z}(G)}\mathcal{Z}(\tilde{G},\mathcal{E})\simeq (T^*/(1-\theta^*)(T^*))\times_{\mathcal{Z}(G)}\mathcal{Z}(\tilde{G}).$$

Pour $\sigma\in\Gamma_F$, notons $\omega_\eta(\sigma)$ l'image dans W^{θ^*} de $v_\eta(\sigma)$, modulo l'isomorphisme $W^\theta\simeq W^{\theta^*}$.

Le couple (μ_η,ω_η) ne dépend pas du choix de e : on ne peut changer e qu'en le multipliant par un élément de $Z(G)$ et on voit que la construction est insensible à une telle multiplication. De même, il ne dépend pas des choix de cochaînes $u_{\mathcal{E}}(\sigma)$ et $u_\eta(\sigma)$. Il ne dépend pas de toute la paire de Borel épinglée $\mathcal{E}$ mais seulement de la paire de Borel sous-jacente (B,T). En effet, si on change seulement l'épinglage, sans changer la paire de Borel sous-jacente, μ_η ne change pas (cf. [I] preuve de 1.10(1)) et les éléments $u_{\mathcal{E}}(\sigma)$ et $u_\eta(\sigma)$ sont multipliés par des éléments de T, ce qui ne change pas ω_η.

Proposition. *(i) Pour $\eta\in\tilde{G}_{ss}(F)$, le couple (μ_η,ω_η) construit ci-dessus appartient à $Stab(\tilde{G}(F))$.*

(ii) L'image de ce couple dans $\mathbf{Stab}(\tilde{G}(F))$ *ne dépend pas de la paire (B,T) utilisée dans sa construction.*

(iii) Soient $\eta,\eta'\in\tilde{G}_{ss}(F)$ et (B,T), (B',T') des paires de Borel conservées respectivement par ad_η et $ad_{\eta'}$. Les couples (μ_η,ω_η) et $(\mu_{\eta'},\omega_{\eta'})$ déduits de ces données sont égaux si et seulement s'il existe $y\in\mathcal{Y}_\eta$ tel que $\eta'=y^{-1}\eta y$ et $(B',T')=ad_{y^{-1}}(B,T)$.

(iv) Soient $\eta,\eta'\in\tilde{G}_{ss}(F)$ et (B,T), (B',T') des paires de Borel conservées respectivement par ad_η et $ad_{\eta'}$. Les couples (μ_η,ω_η) et $(\mu_{\eta'},\omega_{\eta'})$ déduits de ces données ont même image dans $\mathbf{Stab}(\tilde{G}(F))$ *si et seulement si η et η' sont stablement conjugués.*

Preuve. Pour démontrer (i), on peut identifier $\mathcal{E}$ à $\mathcal{E}^*$. On a alors $\sigma_{G^*}=ad_{u_{\mathcal{E}}(\sigma)}\circ\sigma$ pour tout $\sigma\in\Gamma_F$. Soulignons que cette formule définit une action galoisienne sur G mais pas forcément sur $\tilde{G}$ car l'action par conjugaison du cobord de la cochaîne $u_{\mathcal{E}}$ peut ne pas être triviale. Pour cette raison, on n'utilise la notation σ_{G^*} que pour l'action sur G.

On doit montrer que $\omega_\eta(\sigma)\sigma_{G^*}$ conserve μ_η pour tout σ. L'élément $\omega_\eta(\sigma)\sigma_{G^*}(\mu_\eta)$ est l'image dans $(T/(1-\theta)(T))\times_{\mathcal{Z}(G)}\mathcal{Z}(\tilde{G},\mathcal{E})$ de

$$(2)\qquad (ad_{v_\eta(\sigma)}\circ\sigma_{G^*}(\nu),ad_{u_{\mathcal{E}}(\sigma)}\circ\sigma(e)).$$

On sait que σ_{G^*} conserve $Z(\tilde{G},\mathcal{E}^*)$, donc il existe $z(\sigma)\in Z(G)$ tel que $ad_{u_{\mathcal{E}}(\sigma)}\circ\sigma(e)=z(\sigma)^{-1}e$. Parce que $\omega_\eta(\sigma)\in W^\theta$, on peut choisir $n(\sigma)\in G_e$ qui le relève et $t(\sigma)\in T$ de sorte que $v_\eta(\sigma)=t(\sigma)n(\sigma)$. On a alors $ad_{v_\eta(\sigma)}\circ ad_{u_{\mathcal{E}}(\sigma)}\circ\sigma(e)=t(\sigma)\theta(t(\sigma))^{-1}z(\sigma)^{-1}e$. Parce que η est fixe par Γ_F et que $u_\eta(\sigma)\in G_\eta$, on a $ad_{u_\eta(\sigma)}\circ\sigma(\eta)=\eta$, ou encore $ad_{v_\eta(\sigma)}\circ ad_{u_{\mathcal{E}}(\sigma)}\circ\sigma(\nu e)=\nu e$. Les deux relations précédentes entraînent

$$ad_{v_\eta(\sigma)}\circ\sigma_{G^*}(\nu)=t(\sigma)^{-1}\theta(t(\sigma))z(\sigma)\nu.$$

Mais alors le couple (2) a bien pour image μ_η dans $(T/(1-\theta)(T))\times_{\mathcal{Z}(G)}\mathcal{Z}(\tilde{G},\mathcal{E})$.

On doit montrer que ω_η est un cocycle. L'application qui, à $\sigma\in\Gamma_F$, associe l'automorphisme $ad_{u_\eta(\sigma)}\circ\sigma$ de T, est un homomorphisme : son cobord est donné par des automorphismes intérieurs de G_η qui conservent $(B\cap G_\eta,T^{\theta,0})$, donc commutent à T. Mais l'automorphisme $\omega_\eta(\sigma)\sigma_{G^*}$ de T est égal à $ad_{u_\eta(\sigma)}\circ\sigma$. Donc $\sigma\mapsto\omega_\eta(\sigma)\sigma_{G^*}$ est un homomorphisme de Γ_F à valeurs dans le groupe d'automorphismes de T. Cela signifie que ω_η est un cocycle.

De même, $\omega_\eta(\sigma)\sigma_{G^*}$ conserve $\Sigma_+(\mu_\eta)$ parce que $ad_{u_\eta(\sigma)}\circ\sigma$ conserve $B\cap G_\eta$. Cela prouve (i).

Prouvons (ii). Changeons la paire (B,T). D'après [I] 1.3(2), on ne peut que la remplacer par une paire $ad_x\circ w(B,T)$, où $x\in G_\eta$ et $w\in W^\theta$. On sait que $G_\eta\subset Z(G)G_{SC,\eta}$ et que tout élément de W^θ se relève en un élément de $G_{SC,e}$. On est ramené à voir ce qui se passe quand on remplace $\mathcal{E}$ par $ad_x\mathcal{E}$, avec ou bien $x\in G_{SC,\eta}$, ou bien $x\in G_{SC,e}$ et normalise T. Comme dans la preuve de (i), on peut supposer $\mathcal{E}=\mathcal{E}^*$. Dans les deux cas, on doit construire les objets relatifs à $\underline{\mathcal{E}}^*=ad_x(\mathcal{E}^*)$, notons-les en les soulignant, puis les ramener à $\mathcal{E}^*$ par l'isomorphisme canonique ad_x^{-1}. Dans le cas où $x\in G_{SC,\eta}$, on a $\eta=ad_x(\eta)=ad_x(\nu)ad_x(e)$ et on peut prendre $\underline{\nu}=ad_x(\nu)$, $\underline{e}=ad_x(e)$. On peut aussi choisir $u_{\underline{\mathcal{E}}^*}(\sigma)=xu_{\mathcal{E}^*}(\sigma)\sigma(x)^{-1}$ et $\underline{u}_\eta(\sigma)=xu_\eta(\sigma)\sigma(x)^{-1}$. D'où $\underline{v}_\eta(\sigma)=xv_\eta(\sigma)x^{-1}$. En ramenant les objets $\underline{\nu}$, $\underline{e}$ et $\underline{v}_\eta$ par l'isomorphisme ad_x^{-1}, on retrouve les objets initiaux, rien n'a changé. Dans le cas où $x\in G_{SC,e}$ et x normalise T, on a $e=ad_x(e)\in Z(\tilde{G},\underline{\mathcal{E}}^*)$. On peut prendre $\underline{\nu}=\nu$, $\underline{e}=e$. On peut encore prendre $u_{\underline{\mathcal{E}}^*}(\sigma)=xu_{\mathcal{E}^*}(\sigma)\sigma(x)^{-1}$. En posant $\underline{B}=xB^*x^{-1}$, le couple $(\underline{B}\cap G_\eta,T^{*,\theta^*,0})$ est une paire de Borel de G_η et on peut fixer $y\in G_{SC,\eta}$ tel que cette paire soit égale à $ad_y(B^*\cap G_\eta,T^{*,\theta^*,0})$. On peut alors prendre $\underline{u}_\eta(\sigma)=yu_\eta(\sigma)\sigma(y)^{-1}$. Alors

$$\underline{v}_\eta(\sigma)=yu_\eta(\sigma)\sigma(y^{-1}x)u_{\mathcal{E}^*}(\sigma)^{-1}x^{-1}.$$

Ramenons les éléments $\underline{\nu}$, $\underline{e}$ et $\underline{v}_\eta$ par l'isomorphisme ad_x^{-1}. On obtient respectivement les éléments $\nu'=x^{-1}\nu x$, $e'=e$, et

$$v'_\eta(\sigma)=x^{-1}yu_\eta(\sigma)\sigma(y^{-1}x)u_{\mathcal{E}^*}(\sigma)^{-1}$$
$$=x^{-1}yv_\eta(\sigma)ad_{u_{\mathcal{E}^*}(\sigma)}\circ\sigma(y^{-1}x).$$

Les éléments x et y normalisent T^*. Leurs images dans W sont fixes par θ^*, par hypothèse pour x, parce que $y\in G_\eta$ pour y. Donc $x^{-1}y$ définit un élément $w\in W^{\theta^*}$. En notant $\omega'_\eta(\sigma)$ l'image de $v'_\eta(\sigma)$ dans W, on obtient

$$\omega'_\eta(\sigma)=w\omega_\eta(\sigma)\sigma_{G^*}(w)^{-1}.$$

Parce que y normalise T^* et appartient à G_η, un calcul déjà fait plusieurs fois montre que $y\nu y^{-1}$ a même image que ν dans $T^*/(1-\theta^*)(T^*)$. Donc $\nu'=x^{-1}\nu x$ a même image que $w(\nu)$. Mais alors le couple (μ'_η,ω'_η) construit à l'aide de $\underline{\mathcal{E}}$ est $(w(\mu_\eta),\omega'_\eta)$, où ω'_η est comme ci-dessus. Ce couple est conjugué à (μ_η,ω_η), ce qui prouve (ii).

Remarque. En inversant la preuve de (ii), on obtient le résultat suivant.

(3) Soit (μ_η,ω_η) le couple associé à η et à une paire de Borel (B,T). Soit $(\mu',\omega_{\bar{G}'})\in Stab(\tilde{G}(F))$ un couple conjugué à (μ_η,ω_η). Alors il existe une autre paire de Borel $(\underline{B},\underline{T})$ conservée par ad_η de sorte que

- $(\mu',\omega_{\bar{G}'})$ soit le couple associé à η et à cette paire $(\underline{B},\underline{T})$;
- $\underline{T}=T$ et $\underline{B}\cap G_\eta=B\cap G_\eta$.

Preuve. On introduit $\mathcal{E}$ et e comme au début du paragraphe et on identifie $\mathcal{E}$ à $\mathcal{E}^*$. D'après 1.1(4)(ii), on peut fixer $w\in W^{\theta^*}$ de sorte que $(\mu',\omega_{\bar{G}'})=w(\mu_\eta,\omega_\eta)$ et $w(\Sigma_+(\mu_\eta))=\Sigma_+(\mu')$. Relevons l'élément w^{-1} en un élément $x\in G_{SC,e}$ qui normalise $T=T^*$. On pose $\underline{\mathcal{E}}=ad_x(\mathcal{E})$. La preuve de (ii) montre que cette paire vérifie les propriétés requises, pourvu que l'on montre que $\underline{B}\cap G_\eta=B\cap G_\eta$ (cette propriété entraîne que l'on peut prendre $y=1$ donc le w que l'on vient de choisir est le même que plus haut). Or l'égalité $w(\Sigma_+(\mu_\eta))=\Sigma_+(\mu')$ entraîne que les racines de T^* dans le radical unipotent de $\underline{B}\cap G_\eta$ sont positives pour $B=B^*$. Autrement dit $\underline{B}\cap G_\eta\subset B$. D'où forcément $\underline{B}\cap G_\eta=B\cap G_\eta$. Cela prouve (3).

Prouvons (iii). Soient η, η', (B,T) et (B',T') comme en (iii). Supposons qu'il existe $y\in\mathcal{Y}_\eta$ tel que $\eta'=y^{-1}\eta y$ et $(B',T')=ad_{y^{-1}}(B,T)$. On fixe un tel y et on le décompose en $y=y_{sc}z$, avec $y_{sc}\in G_{SC}$ et $z\in Z(G)$ (on identifie ici y_{sc} à son image dans G). On complète (B,T) en une paire de Borel épinglée que l'on identifie à $\mathcal{E}^*$. On complète (B',T') en la paire de Borel épinglée $\mathcal{E}'=ad_{y_{sc}^{-1}}(\mathcal{E}^*)$. On affecte d'un $'$ les objets relatifs à η' et $\mathcal{E}'$. On a $\eta'=y^{-1}\eta y=y_{sc}^{-1}\nu y_{sc}z^{-1}\theta(z)y_{sc}^{-1}ey_{sc}$. On peut prendre $\nu'=y_{sc}^{-1}\nu y_{sc}z^{-1}\theta(z)$ et $e'=y_{sc}^{-1}ey_{sc}$. On peut prendre $u_{\mathcal{E}'}(\sigma)=y_{sc}^{-1}u_{\mathcal{E}^*}(\sigma)\sigma(y_{sc})$. Puisque $ad_{u_\eta(\sigma)}\circ\sigma$ conserve $(B^*\cap G_\eta,T^{*,\theta^*,0})$, l'automorphisme $ad_{y^{-1}u_\eta(\sigma)}\circ\sigma\circ ad_y$ conserve $(B'\cap G_{\eta'},T'\cap G_{\eta'})$. On a

$$ad_{y^{-1}u_\eta(\sigma)}\circ\sigma\circ ad_y=ad_{y^{-1}u_\eta(\sigma)\sigma(y)}\circ\sigma.$$

Puisque $\sigma(y)\in I_\eta y$, on peut écrire $\sigma(y)=z(\sigma)x(\sigma)y$, avec $z(\sigma)\in Z(G)$ et $x(\sigma)\in G_{SC,\eta}$. Alors

$$ad_{y^{-1}u_\eta(\sigma)}\circ\sigma\circ ad_y=ad_{y^{-1}u_\eta(\sigma)x(\sigma)y}\circ\sigma.$$

L'élément $y^{-1}u_\eta(\sigma)x(\sigma)y=y_{sc}^{-1}u_\eta(\sigma)x(\sigma)y_{sc}$ appartient à $G_{SC,\eta'}$ et on peut choisir $u_{\eta'}(\sigma)=y_{sc}^{-1}u_\eta(\sigma)x(\sigma)y_{sc}$. D'où

$$v_{\eta'}(\sigma)=y_{sc}^{-1}u_\eta(\sigma)x(\sigma)y_{sc}\sigma(y_{sc})^{-1}u_{\mathcal{E}^*}(\sigma)^{-1}y_{sc}^{-1}.$$

On a

$$x(\sigma)y_{sc}\sigma(y_{sc})^{-1}=z(\sigma)^{-1}\sigma(y)y^{-1}y_{sc}\sigma(y_{sc})^{-1}.$$

Ceci est un élément de $Z(G)$, notons-le $\zeta(\sigma)$. Alors

$$v_{\eta'}(\sigma)=\zeta(\sigma)y_{sc}^{-1}v_\eta(\sigma)y_{sc}.$$

Le couple $(\mu_{\eta'},\omega_{\eta'})$ se déduit de ν', e', $v_{\eta'}$ en ramenant ces objets à $\mathcal{E}^*$ par l'isomorphisme $ad_{y_{sc}}$. Autrement dit, $\mu_{\eta'}$ est l'image naturelle de $(\nu z^{-1}\theta(z),e)$ et $\omega_{\eta'}(\sigma)$ est l'image dans W de $\zeta(\sigma)v_\eta(\sigma)$. Ces images ne sont autres que μ_η et ω_η. Cela prouve que $(\mu_{\eta'},\omega_{\eta'})=(\mu_\eta,\omega_\eta)$.

Inversement, soient η,η', (B,T) et (B',T') comme en (iii) et supposons que $(\mu_{\eta'},\omega_{\eta'})=(\mu_\eta,\omega_\eta)$. On complète (B,T) en une paire de Borel épinglée que l'on peut supposer être égale à $\mathcal{E}^*$ et on complète (B',T') en une paire de Borel épinglée $\mathcal{E}'$. On note comme plus haut les termes relatifs à η. On choisit $d_{sc}\in G_{SC}$ tel que $ad_{d_{sc}}(\mathcal{E}')=\mathcal{E}^*$. L'élément $e'=d_{sc}^{-1}ed_{sc}$ appartient à $Z(\tilde{G},\mathcal{E}')$. On peut écrire $\eta'=\nu'e'$, avec $\nu'\in T'$. L'hypothèse $\mu_{\eta'}=\mu_\eta$ signifie que ν et $d_{sc}\nu'd_{sc}^{-1}$ ont même image dans $T^*/(1-\theta^*)(T^*)$. On peut choisir $\tau\in T^*$ de sorte que $\tau d_{sc}\nu'd_{sc}^{-1}\theta^*(\tau)^{-1}=\nu$. Posons $y=\tau d_{sc}$. Alors $y^{-1}\eta y=\eta'$ et $ad_{y^{-1}}(B,T)=ad_{y^{-1}}(B^*,T^*)=(B',T')$. On peut choisir $u_{\mathcal{E}'}(\sigma)=d_{sc}^{-1}u_{\mathcal{E}^*}(\sigma)\sigma(d_{sc})$. Choisissons une cochaîne $u_{\eta'}$ relative à η' et $\mathcal{E}'$. Alors

$$v_{\eta'}(\sigma)=u_{\eta'}(\sigma)\sigma(d_{sc})^{-1}u_{\mathcal{E}^*}(\sigma)^{-1}d_{sc}.$$

L'hypothèse $\omega_{\eta'}=\omega_\eta$ signifie que les deux éléments $d_{sc}v_{\eta'}(\sigma)d_{sc}^{-1}$ et $v_\eta(\sigma)$ ont même image dans W. Autrement dit, on a la relation

$$d_{sc}u_{\eta'}(\sigma)\sigma(d_{sc})^{-1}u_{\mathcal{E}^*}(\sigma)^{-1}\in T^*u_\eta(\sigma)u_{\mathcal{E}^*}(\sigma)^{-1},$$

ou encore

$$d_{sc}u_{\eta'}(\sigma)\sigma(d_{sc})^{-1}\in T^*u_\eta(\sigma).$$

On peut multiplier cette relation à gauche par τ et à droite par $\sigma(\tau)^{-1}$. Parce que $u_\eta(\sigma)\circ\sigma$ conserve T^*, on obtient

$$yu_{\eta'}(\sigma)\sigma(y)^{-1}\in T^*u_\eta(\sigma),$$

ou encore

$$yu_{\eta'}(\sigma)y^{-1}y\sigma(y)^{-1}\in T^*u_\eta(\sigma).$$

Les éléments $yu_{\eta'}(\sigma)y^{-1}$ et $u_\eta(\sigma)$ appartiennent à G_η. Parce que $y^{-1}\eta y=\eta'$, l'élément $y\sigma(y)^{-1}$ appartient au commutant $Z_G(\eta)$. On peut donc remplacer dans la relation ci-dessus le tore T^* par son intersection avec $Z_G(\eta)$, autrement dit par T^{*,θ^*}. Mais ce groupe est égal à $Z(G)^\theta T^{*,\theta^*,0}$, donc contenu dans I_η. La relation précédente entraîne alors que $y\sigma(y)^{-1}\in I_\eta$. Donc $y\in\mathcal{Y}_\eta$, ce qui achève la preuve de (iii).

Prouvons (iv). Soient η, η', (B,T) et (B',T') comme en (iv). Supposons η et η' stablement conjugués, fixons $y\in\mathcal{Y}_\eta$ tel que $\eta'=y^{-1}\eta y$. La paire $ad_{y^{-1}}(B,T)$ est conservée par $ad_{\eta'}$. On peut remplacer (B',T') par cette paire $ad_{y^{-1}}(B,T)$ puisque, d'après (ii), cela ne change pas l'image de $(\mu_{\eta'},\omega_{\eta'})$ dans $\mathbf{Stab}(\tilde{G}(F))$. Mais alors, d'après (iii), on a $(\mu_{\eta'},\omega_{\eta'})=(\mu_\eta,\omega_\eta)$. A fortiori, ces termes ont même image dans $\mathbf{Stab}(\tilde{G}(F))$. Inversement, supposons que (μ_η,ω_η) et $(\mu_{\eta'},\omega_{\eta'})$ ont même image dans $\mathbf{Stab}(\tilde{G}(F))$. D'après (3), on peut changer la paire (B',T') de sorte que l'on ait l'égalité $(\mu_{\eta'},\omega_{\eta'})=(\mu_\eta,\omega_\eta)$. Alors (iii) implique que η et η' sont stablement conjugués. $\square$

Notons $\tilde{G}_{ss}(F)/st-conj$ l'ensemble des classes de conjugaison stable semi-simples dans $\tilde{G}(F)$. La proposition nous fournit une application que l'on note

$$\chi^{\tilde{G}}:\tilde{G}_{ss}(F)/st-conj\to\mathbf{Stab}(\tilde{G}(F)).$$

Celle-ci est injective d'après le (iv) de la proposition.

Soit $\mathcal{X}\in\mathbf{Stab}(\tilde{G}(F))$. Modulo divers choix, on lui associe un groupe $\bar{G}$ comme en 1.1. En introduisant les tores "standard" $\hat{T}$ et $\hat{\bar{T}}$ des groupes duaux $\hat{G}$ et $\hat{\bar{G}}$, on peut identifier $\hat{\bar{T}}$ à $\hat{T}/(1-\hat{\theta})(\hat{T})$, muni d'une action galoisienne $\sigma\mapsto\omega_{\bar{G}}(\sigma)\circ\sigma_{G^*}$. Un calcul de système de racines déjà fait plusieurs fois montre que $Z(\hat{G})$ s'envoie dans $Z(\hat{\bar{G}})$. Ainsi, la donnée $\mathbf{a}$ se pousse en un élément de $H^1(W_F;Z(\hat{\bar{G}}))/ker^1(W_F;Z(\hat{\bar{G}}))$. Celui-ci détermine un caractère automorphe de $\bar{G}(\mathbb{A}_F)$. On voit que la paire formée du groupe $\bar{G}$ et de ce caractère ne dépend des choix qu'à isomorphisme près.

Soient $\eta\in\tilde{G}_{ss}(F)$ et (B,T) une paire de Borel conservée par ad_η. On peut utiliser l'élément η pour construire le groupe $\bar{G}$ associé comme en 1.1 au couple (μ_η,ω_η). Ce groupe n'est autre qu'une forme quasi-déployée du groupe G_η. Le caractère automorphe ci-dessus de $\bar{G}(\mathbb{A}_F)$ se transfère en un caractère automorphe de $G_\eta(\mathbb{A}_F)$, qui n'est autre que la restriction de ω à ce groupe.

Rappelons que l'on dit qu'un élément $\eta\in\tilde{G}_{ss}(F)$ est elliptique s'il vérifie les conditions équivalentes

(4) il existe un sous-tore tordu $\tilde{T}$ de $\tilde{G}$ défini sur F et elliptique (c'est-à-dire tel que $T^{\Gamma_F,\theta,0}=Z(G)^{\Gamma_F,\theta,0}$) tel que $\eta\in\tilde{T}(F)$;

(5) on a l'égalité $Z(G_\eta)^{\Gamma_F,0}=Z(G)^{\Gamma_F,\theta,0}$.

On note $\tilde{G}(F)_{ell}$ l'ensemble des éléments elliptiques de $\tilde{G}_{ss}(F)$. Cet ensemble est invariant par conjugaison stable. On voit qu'une classe de conjugaison stable semi-simple est formée d'éléments elliptiques si et seulement si son image par $\chi^{\tilde{G}}$ appartient à $\mathbf{Stab}_{ell}(\tilde{G}(F))$.

1.3 Le cas quasi-déployé à torsion intérieure

Lemme. *Supposons $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$ quasi-déployé et à torsion intérieure.*

(i) L'application $\chi^{\tilde{G}}$ est bijective.

(ii) Plus précisément, pour $(\mu, \omega_{\bar{G}}) \in Stab(\tilde{G}(F))$, il existe $\epsilon \in \tilde{G}_{ss}(F)$ et une paire de Borel (B_ϵ, T_ϵ) tels que

- ad_ϵ conserve (B_ϵ, T_ϵ) ;

- en utilisant la paire (B_ϵ, T_ϵ) dans la construction de 1.2, on a l'égalité $(\mu_\epsilon, \omega_\epsilon) = (\mu, \omega_{\bar{G}})$;

- G_ϵ est quasi-déployé et la paire de Borel $(B^*_\flat, T_\epsilon) = (G_\epsilon \cap B_\epsilon, T_\epsilon)$ de ce groupe est définie sur F.

Preuve. On peut identifier $\mathcal{E}^*$ à une paire de Borel épinglée de G définie sur F. L'action galoisienne quasi-déployée n'est autre que l'action naturelle. Soit $(\mu, \omega_{\bar{G}}) \in Stab(\tilde{G}(F))$. Le terme $\omega_{\bar{G}}$ est un cocycle de Γ_F dans W. D'après [K1] corollaire 1.2, on peut fixer $g_{sc} \in G_{SC}$ tel que, pour tout $\sigma \in \Gamma_F$, $g_{sc}\sigma(g_{sc})^{-1}$ normalise T^* et ait $\omega_{\bar{G}}(\sigma)$ pour image dans W. Le terme μ est un élément de $T^* \times_{Z(G)} Z(\tilde{G}, \mathcal{E}^*)$ et cet ensemble n'est autre que le centralisateur $\tilde{T}^*$ de T^* dans $\tilde{G}$. Posons $\eta = g_{sc}\mu g_{sc}^{-1}$. Parce que $\omega_{\bar{G}}(\sigma)\sigma$ fixe μ pour tout σ, on voit que $\eta \in \tilde{G}(F)$. C'est un élément semi-simple. On pose $(B_\epsilon, T_\epsilon) = ad_{g_{sc}}(B^*, T^*)$. On vérifie immédiatement qu'en utilisant cette paire, la construction de 1.2 envoie ϵ sur $(\mu, \omega_{\bar{G}})$. En utilisant les notations de l'énoncé, on a $B^*_\flat = ad_{g_{sc}}(B^* \cap G_\mu)$ et $T_\epsilon = ad_{g_{sc}}(T^*)$. Parce que $\omega_{\bar{G}}(\sigma)\sigma$ conserve $\Sigma_+(\mu)$ pour tout σ, l'automorphisme $ad_{g_{sc}\sigma(g_{sc})^{-1}} \circ \sigma$ conserve $(B^* \cap G_\mu, T^*)$. Donc σ conserve $(B^*_\flat, T_\epsilon)$. $\square$

1.4 Le cas local

Dans les trois paragraphes précédents, le corps de base F était notre corps de nombres. En fait, on peut le remplacer par un corps local de caractéristique nulle, tout reste vrai à l'exception suivante près.

Exception. C'est la dernière assertion de 1.2 dans le cas où F est archimédien. Dans ce cas, les conditions (4) et (5) de 1.2 ne sont plus équivalentes. Dans les articles précédents, on a choisi la condition (4) pour définir l'ellipticité. Mais la dernière assertion de 1.2 n'est vraie que si on utilise la condition (5).

En particulier, pour une place v de notre corps de nombres F, on définit les ensembles $Stab(\tilde{G}(F_v))$ et $\mathbf{Stab}(\tilde{G}(F_v))$. Il y a une application naturelle de localisation $Stab(\tilde{G}(F)) \to Stab(\tilde{G}(F_v))$: à $(\mu, \omega_{\bar{G}})$, on associe $(\mu, \omega_{\bar{G}_v})$, où $\omega_{\bar{G}_v}$ est la restriction de $\omega_{\bar{G}}$ à Γ_{F_v}. Cette application se quotiente en une application $\mathbf{Stab}(\tilde{G}(F)) \to \mathbf{Stab}(\tilde{G}(F_v))$. Le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} \tilde{G}_{ss}(F)/st-conj & \to & \tilde{G}_{ss}(F_v)/st-conj \\ \chi^{\tilde{G}} \downarrow & & \downarrow \chi^{\tilde{G}_v} \\ \mathbf{Stab}(\tilde{G}(F)) & \to & \mathbf{Stab}(\tilde{G}(F_v)) \end{array}$$

On peut remplacer la place v par un ensemble fini V de places de F : on définit $\mathbf{Stab}(\tilde{G}(F_V)) = \prod_{v \in V} \mathbf{Stab}(\tilde{G}(F_v))$ et on a des propriétés analogues.

1.5 Rappels sur le cas local non ramifié

Fixons une place finie $v \notin V_{ram}$. Nous allons d'abord fixer les notations qui seront utilisées dans toute la suite de l'article. On note $\mathfrak{o}_v$ l'anneau des entiers de F_v, $\mathfrak{o}_v^\times$ le groupe d'unités et $\mathbb{F}_v$ le corps résiduel. On note $\bar{\mathfrak{o}}_v$, $\bar{\mathfrak{o}}_v^\times$ et $\bar{\mathbb{F}}_v$, resp. $\mathfrak{o}_v^{nr}$, $\mathfrak{o}_v^{nr,\times}$, $\bar{\mathbb{F}}_v$, les objets analogues pour la clôture algébrique $\bar{F}_v$, resp. pour la plus grande extension non-ramifiée F_v^{nr} contenue dans $\bar{F}_v$. On pose $\Gamma_v^{nr} = Gal(F_v^{nr}/F_v)$ et on note $I_v \subset \Gamma_{F_v}$ le groupe d'inertie. On a aussi $I_v \subset W_{F_v}$ et on pose $W_v^{nr} = W_{F_v}/I_v$. On note p la caractéristique de $\mathbb{F}_v$. En [VI] 1.1, on a fixé un sous-groupe compact hyperspécial K_v de $G(F_v)$ et un sous-espace hyperspécial $\tilde{K}_v$ de $\tilde{G}(F_v)$. Au groupe K_v est associé un schéma en groupes lisse $\mathcal{K}_v$ sur $\mathfrak{o}_v$. On note $K_v^{nr} = \mathcal{K}_v(\mathfrak{o}_v^{nr})$. Si E est une extension finie de F non ramifiée en v et si w est une place de E au-dessus de v, on utilise les notations $\mathfrak{o}_w$ etc... et $K_w = \mathcal{K}_v(\mathfrak{o}_w)$. Si E est une extension non ramifiée de F_v, on utilisera plutôt les notations $\mathfrak{o}_E$ etc... et $K_v^E = \mathcal{K}_v(\mathfrak{o}_E)$. Le groupe K_v détermine des sous-groupes compacts hyperspéciaux des groupes G_{SC}, G_{AD} et $G_\sharp = G/Z(G)^\theta$. On les note $K_{sc,v}$, $K_{ad,v}$, $K_{\sharp,v}$.

On se rappelle que le groupe K_v est issu d'une paire de Borel épinglée de G définie sur F_v. On fixe une telle paire $\mathcal{E}_0 = (B_0, T_0, (E_{0,\alpha})_{\alpha\in\Delta})$. Le tore T_0 est non ramifié et a donc une structure naturelle sur $\mathfrak{o}_v$. On a $T_0(\mathfrak{o}_v) = T_0(F_v) \cap K_v$. D'après les théorèmes de structure de Bruhat et Tits, l'application

$$(1) \qquad \begin{array}{ccc} T_0(\mathfrak{o}_v)\times K_{sc,v} & \to & K_v \\ (t,x) & \mapsto & t\pi(x) \end{array}$$

est surjective, où $\pi : G_{SC} \to G$ est l'homomorphisme naturel.

On se rappelle le groupe $G_{ab}(F_v)$ de [I] 1.12. On a $G_{ab}(F_v) = G(F_v)/\pi(G_{SC}(F_v))$. Soit S un sous-tore maximal de G défini sur F_v et non ramifié. On a

(2) $S(\mathfrak{o}_v)$ et K_v ont même image dans $G_{ab}(F_v)$.

Preuve. C'est clair d'après (1) si $S = T_0$. Il suffit donc de prouver que, si S_1 et S_2 sont deux sous-tores maximaux de G définis sur F_v et non ramifiés, on a

(3) $S_1(\mathfrak{o}_v)$ et $S_2(\mathfrak{o}_v)$ ont même image dans $G_{ab}(F_v)$.

Puisque S_1 et S_2 sont déployés sur F_v^{nr}, on peut fixer $x \in G(F_v^{nr})$ de sorte que $S_2 = ad_x(S_1)$. Soit $s_1 \in S_1(\mathfrak{o}_v)$, posons $s_2 = xs_1x^{-1}$. Alors $s_2 \in S_2(\mathfrak{o}_v^{nr})$. On sait que tout commutateur se relève canoniquement dans G_{SC}. Cela entraîne qu'il existe $y \in G_{SC}(F_v^{nr})$ tel que $xs_1x^{-1}s_1^{-1} = \pi(y)$. On a $s_2 = \pi(y)s_1$. Soit $\sigma \in \Gamma_v^{nr}$. On a $\sigma(s_2) = \pi(\sigma(y))s_1$ donc $s_2\sigma(s_2)^{-1} = \pi(y\sigma(y)^{-1})$. Mais $s_2\sigma(s_2)^{-1}$ appartient à $S_2(\mathfrak{o}_v^{nr})$ et l'image réciproque de ce groupe dans $G_{SC}(F_v^{nr})$ est $S_{2,sc}(\mathfrak{o}_v^{nr})$. Donc $y\sigma(y)^{-1} \in S_{2,sc}(\mathfrak{o}_v^{nr})$. L'application $\sigma \mapsto y\sigma(y)^{-1}$ est un cocycle et $H^1(\Gamma_v^{nr}; S_{2,sc}(\mathfrak{o}_v^{nr})) = \{1\}$. On peut donc fixer $u \in S_{2,sc}(\mathfrak{o}_v^{nr})$ tel que $y\sigma(y)^{-1} = u^{-1}\sigma(u)$ pour tout σ. Posons $s_2' = \pi(u)s_2$ et $y' = uy$. Alors $y' \in G_{SC}(F_v)$, $s_2' \in S_2(\mathfrak{o}_v^{nr})$ et $s_2' = \pi(y')s_1$. Ces relations entraînent que $s_2' \in S_2(\mathfrak{o}_v)$. De plus, puisque $\pi(G_{SC}(F_v))$ est le noyau de la projection $G(F_v) \to G_{ab}(F_v)$, s_2' et s_1 ont même image dans $G_{ab}(F_v)$. Cela démontre que l'image dans ce groupe de $S_1(\mathfrak{o}_v)$ est contenue dans celle de $S_2(\mathfrak{o}_v)$. En échangeant les rôles de S_1 et S_2, on obtient l'égalité de ces images. $\square$

Rappelons que $H^1(W_{F_v}; Z(\hat{G}))$ est le groupe dual de $G_{ab}(F_v)$. Notons $Res_{I_v} : H^1(W_{F_v}; Z(\hat{G})) \to H^1(I_v; Z(\hat{G}))$ l'homomorphisme de restriction. On a

(4) le noyau de Res_{I_v} est l'annulateur dans $H^1(W_{F_v}; Z(\hat{G}))$ de l'image de K_v dans $G_{ab}(F_v)$.

Preuve. Supposons d'abord que G soit un tore, notons-le plutôt T_0. On a alors $K_v =$

$T_0(\mathfrak{o}_v)$. On a le diagramme de suites exactes

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \to & H^1(W_v^{nr};\hat{T}_0) & \to & H^1(W_{F_v};\hat{T}_0) & \stackrel{Res_{I_v}}{\to} & H^1(I_v;\hat{T}_0) \\ 0 & \leftarrow & X_*(T_0)^{\Gamma_v^{nr}} & \leftarrow & T_0(F_v) & \leftarrow & T_0(\mathfrak{o}_v) \end{array}$$

Le groupe $H^1(W_v^{nr};\hat{T}_0)$ s'identifie au quotient des coinvariants $\hat{T}_{0,\Gamma_v^{nr}}$, qui s'identifie lui-même à $Hom(X_*(T_0)^{\Gamma_v^{nr}};\mathbb{C}^\times)$. Les flèches de gauche du diagramme ci-dessus sont compatibles à cette dualité et à celle entre $H^1(W_{F_v};\hat{T}_0)$ et $T_0(F_v)$. Un élément de $H^1(W_{F_v};\hat{T}_0)$ appartient au noyau de Res_{I_v} si et seulement s'il provient d'un élément de $H^1(W_v^{nr};\hat{T}_0)$, ou encore si et seulement si le caractère de $T_0(F_v)$ qu'il définit se quotiente en un caractère de $X_*(T_0)^{\Gamma_v^{nr}}$, ou encore si et seulement si ce caractère de $T_0(F_v)$ annule $T_0(\mathfrak{o}_v)$. Cela prouve (4) pour un tore.

Passons au cas général. Avec les notations introduites plus haut, on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H^1(W_{F_v};Z(\hat{G})) & \to & H^1(W_{F_v};\hat{T}_0) \\ Res_{I_v}\downarrow & & Res_{I_v}\downarrow \\ H^1(I_v;Z(\hat{G})) & \to & H^1(I_v;\hat{T}_0) \end{array}$$

Les flèches horizontales sont injectives : par des suites exactes de cohomologie, cela résulte de la connexité de $\hat{T}_{0,ad}^{\Gamma_{F_v}}$ et $\hat{T}_{0,ad}^{I_v}$. Un élément $\chi\in H^1(W_{F_v};Z(\hat{G}))$ appartient donc au noyau de Res_{I_v} si et seulement si son image dans $H^1(W_{F_v};\hat{T}_0)$ appartient au noyau de l'application similaire. D'après ce que l'on a déjà prouvé, cela équivaut à ce que χ annule l'image de $T_0(\mathfrak{o}_v)$ dans $G_{ab}(F_v)$. D'après (2), cette image est aussi celle de K_v. $\square$

On note précisément W le groupe de Weyl de G relatif à T_0. Soit E une extension finie non ramifiée de F_v telle que G soit déployé sur E. Montrons que

(5) soit $u: Gal(E/F_v)\to W$ un cocycle; alors il existe $x\in K_v^E$ tel que, pour tout $\sigma\in Gal(E/F_v)$, $x\sigma(x)^{-1}$ normalise T_0 et ait $u(\sigma)$ pour image dans W.

Fixons un Frobenius $\phi\in\Gamma_{F_v}$. On peut relever $u(\phi)$ en un élément de K_v^{nr} qui normalise T_0. On peut même supposer que cet élément appartient à un sous-groupe invariant par Γ_v^{nr} dont tous les éléments sont d'ordre fini (le groupe engendré par l'image d'une section de Springer et tous les éléments d'ordre au plus 2 de $T_0(\mathfrak{o}_v^{nr})$ convient). Appliquant [W1] 4.2(2), il existe $y\in K_v^{nr}$ tel que $y\phi(y)^{-1}$ soit un relèvement de $u(\phi)$ dans le normalisateur de T_0. Notons $N=[E:F_v]$. Alors $y\phi^N(y)^{-1}$ relève $u(\phi^N)=1$ donc appartient à $T_0\cap K_v^{nr}=T_0(\mathfrak{o}_v^{nr})$. L'application $\sigma\mapsto y\sigma(y)^{-1}$ est un cocycle de $Gal(F_v^{nr}/E)$ dans $T_0(\mathfrak{o}_v^{nr})$. Un tel cocycle est un cobord. Il existe donc $t\in T_0(\mathfrak{o}_v^{nr})$ tel que $y\sigma(y)^{-1}=t\sigma(t)^{-1}$ pour tout $\sigma\in Gal(F_v^{nr}/E)$. On pose $x=t^{-1}y$. Alors $x\in K_v^{nr}$ et $x\phi^N(x)^{-1}=1$, donc $x\in K_v^E$. De plus $x\phi(x)^{-1}$ relève $u(\phi)$. Par la relation de cocycle, $x\sigma(x)^{-1}$ relève donc $u(\sigma)$ pour tout $\sigma\in Gal(E/F_v)$. Cela prouve (5). $\square$

On a vu en [I] 6.2(2) qu'il existait un couple (ν_0,e_0) tel que $\nu_0\in T_0(\mathfrak{o}_v^{nr})$, $e_0\in Z(\tilde{G},\mathcal{E}_0)(F_v^{nr})$ et $\nu_0e_0\in\tilde{K}_v$. L'hypothèse $v\notin V_{ram}$ implique que p est "grand", donc que l'image naturelle de $X_*(T_{0,sc})$ dans $X_*(T_{0,ad})$ est d'indice premier à p. Puisqu'extraire des racines d'ordre premier à p d'unités ne crée que des extensions non-ramifiées, l'application

$$T_{0,sc}(\mathfrak{o}_v^{nr})\to T_{0,ad}(\mathfrak{o}_v^{nr})$$

est surjective. Quitte à multiplier ν_0 par un élément de $Z(G;F_v^{nr})\cap T_0(\mathfrak{o}_v^{nr})$ et e_0 par l'inverse de cet élément, on peut donc supposer qu'il existe $\nu_{0,sc}\in T_{0,sc}(\mathfrak{o}_v^{nr})$ tel que $\nu_0=\pi(\nu_{0,sc})$. La condition $\nu_0e_0\in\tilde{G}(F_v)$ implique alors qu'il existe un cocycle non ramifié $\sigma\mapsto z(\sigma)$ de Γ_{F_v} dans $Z(G_{SC})$ ($=Z(G_{SC};F_v^{nr})$ d'après l'hypothèse $v\notin V_{ram}$)

tel que $\sigma(\nu_{0,sc})=z(\sigma)\nu_{0,sc}$ et $\sigma(e_0)=z(\sigma)^{-1}e_0$ pour tous σ. On suppose désormais que (ν_0,e_0) vérifie cette hypothèse.

On peut identifier $\mathcal{E}_0$ à la paire de Borel épinglée de G, munie de son action galoisienne quasi-déployée. Notons μ_0 l'image du couple (ν_0,e_0) dans $(T^*/(1-\theta^*)(T^*))\times_{\mathcal{Z}(G)}\mathcal{Z}(\tilde{G})$. Ce terme dépend des choix effectués. Mais les groupes $T^*(\mathfrak{o}_v^{nr})$ et $T^*(\bar{\mathfrak{o}}_v)$ agissent sur T^* et ces actions se descendent en des actions sur $(T^*/(1-\theta^*)(T^*))\times_{\mathcal{Z}(G)}\mathcal{Z}(\tilde{G})$. On vérifie que la classe $T^*(\mathfrak{o}_v^{nr})\mu_0$ ne dépend pas des choix, a fortiori la classe $T^*(\bar{\mathfrak{o}}_v)\mu_0$ n'en dépend pas non plus. Remarquons que l'on obtiendrait les mêmes classes en remplaçant μ_0 par l'image du couple $(1,e_0)$. On a

(6) ces classes sont invariantes par l'action de W^{θ^*}.

Preuve. Le couple $(1,e_0)$ étant invariant par W^{θ^*}, la seule chose à prouver est que les sous-groupes $T^*(\mathfrak{o}_v^{nr})$ et $T^*(\bar{\mathfrak{o}}_v)$ le sont aussi. C'est immédiat puisque, le groupe G étant non ramifié en v, tout élément de W définit un automorphisme de T^* défini sur F_v^{nr}. $\square$

On pose $\mu(\tilde{K}_v)=T^*(\bar{\mathfrak{o}}_v)\mu_0$.

1.6 Paramètres dans le cas local non ramifié

On fixe $v\not\in V_{ram}$. Soit $\mathcal{X}\in\mathbf{Stab}(\tilde{G}(F_v))$. Fixons $(\mu,\omega_{\bar{G}})\in Stab(\tilde{G}(F_v))$ d'image $\mathcal{X}$ et relevons μ en un couple $(\nu,\bar{e})$, avec $\nu\in T^*$ et $\bar{e}\in\mathcal{Z}(\tilde{G})$. Considérons les conditions suivantes :

(nr1) pour tout $\alpha\in\Sigma(T^*)$, $(N\alpha)(\nu)\in\bar{\mathfrak{o}}_v^{\times}$;

(nr2)(type 1) pour $\alpha\in\Sigma(T^*)$ de type 1, la relation $(N\alpha)(\nu)\neq 1$ entraîne que la réduction dans $\bar{\mathbb{F}}_v$ de $(N\alpha)(\nu)$ est différente de 1 ;

(nr2)(types 2 et 3) pour $\alpha\in\Sigma(T^*)$ de type 2 ou 3, et pour $\epsilon=\pm1$, la relation $(N\alpha)(\nu)+\epsilon\neq 0$ entraîne que la réduction dans $\bar{\mathbb{F}}_v$ de $(N\alpha)(\nu)+\epsilon$ est non nulle ;

(nr3) $\mu\in\mu(\tilde{K}_v)$;

(nr4) le cocycle $\omega_{\bar{G}}$ est non ramifié.

Ces conditions ne dépendent pas des relèvements choisis.

Lemme. *(i) Supposons vérifiées (nr3) et (nr4). Alors il existe une classe de conjugaison stable $\mathcal{O}\in\tilde{G}_{ss}(F_v)/st-conj$ et un élément $\eta\in\mathcal{O}$ tels que $\chi^{\tilde{G}}(\mathcal{O})=\mathcal{X}$, que $\eta\in\tilde{K}_v$ et que G_η soit quasi-déployé.*

(ii) Supposons vérifiées (nr1) et (nr2) et supposons qu'il existe une classe de conjugaison stable $\mathcal{O}\in\tilde{G}_{ss}(F_v)/st-conj$ telle que $\chi^{\tilde{G}}(\mathcal{O})=\mathcal{X}$ et que $\mathcal{O}$ coupe $\tilde{K}_v$. Alors (nr3) et (nr4) sont vérifiées. Pour $\eta\in\mathcal{O}\cap\tilde{K}_v$, le groupe G_η est non ramifié et $K_v\cap G_\eta(F_v)$ en est un sous-groupe compact hyperspécial. Plus précisément, en notant $\mathcal{K}_\eta$ le schéma en groupes associé à ce groupe hyperspécial, on a $\mathcal{K}_\eta(\mathfrak{o}_E)=\mathcal{K}_v(\mathfrak{o}_E)\cap G_\eta(E)$ pour toute extension non ramifiée E de F_v.

Preuve de (i). Avec les notations de 1.5, on peut identifier $\mathcal{E}^*$ à $\mathcal{E}_0$ et supposer que $\bar{e}$ est l'image de e_0. Notons $\bar{\nu}$ l'image de ν dans $T_0/(1-\theta)(T_0)$, où $\theta=ad_{e_0}$. Puisque μ est fixe par l'action $\sigma\mapsto\omega_{\bar{G}}(\sigma)\sigma$ et puisque $\sigma(e_0)=z(\sigma)^{-1}e_0$, on a l'égalité

$$(1)\qquad \omega_{\bar{G}}(\sigma)\sigma(\bar{\nu})=z(\sigma)\bar{\nu}.$$

Puisque $\omega_{\bar{G}}$ et z sont non ramifiés, cette relation implique que $\bar{\nu}\in(T_0/(1-\theta)(T_0))(F_v^{nr})$. D'après (nr3), on a aussi $\bar{\nu}\in(T_0/(1-\theta)(T_0))(\bar{\mathfrak{o}}_v)$. Donc $\bar{\nu}$ appartient à l'intersection de ces deux groupes, qui n'est autre que $(T_0/(1-\theta)(T_0))(\mathfrak{o}_v^{nr})$. De la suite exacte de tores non ramifiés

$$1 \to (1-\theta)(T_0) \to T_0 \to T_0/(1-\theta)(T_0) \to 1$$

se déduit une suite exacte

$$1 \to ((1-\theta)(T_0))(\mathfrak{o}_v^{nr}) \to T_0(\mathfrak{o}_v^{nr}) \to (T_0/(1-\theta)(T_0))(\mathfrak{o}_v^{nr}) \to 1.$$

Quitte à changer ν, on peut donc supposer $\nu \in T_0(\mathfrak{o}_v^{nr})$. La relation (1) implique l'existence d'une cochaîne non ramifiée $t : \Gamma_{F_v} \to ((1-\theta)(T_0))(\mathfrak{o}_v^{nr})$ telle que

$$\omega_{\bar{G}}(\sigma)\sigma(\nu) = z(\sigma)t(\sigma)\nu.$$

Puisque z est un cocycle à valeurs centrales, cette égalité implique que t est un cocycle si l'on munit $((1-\theta_0)(T_0))(\mathfrak{o}_v^{nr})$ de la structure galoisienne $\sigma \mapsto \omega_{\bar{G}}(\sigma)\sigma_G$. Le théorème de Lang implique qu'un tel cocycle est un cobord. Donc, quitte à changer encore ν, on peut supposer

$$\omega_{\bar{G}}(\sigma)\sigma_G(\nu) = z(\sigma)\nu$$

pour tout σ. Introduisons le groupe G_{SC}^{θ} des points fixes de $\theta = ad_{e_0}$ dans G_{SC}. De la paire de Borel épinglée $\mathcal{E}_0$ se déduit une telle paire pour G_{SC}^{θ}, puis un sous-groupe compact hyperspécial de $G_{SC}^{\theta}(F_v)$, notons-le K_v^1. Comme précédemment, il détermine un sous-groupe $K_v^{1,nr}$ de $G_{SC}^{\theta}(F_v^{nr})$. En appliquant 1.5(5), on obtient un élément $k \in K_v^{1,nr}$ tel que, pour tout $\sigma \in \Gamma_v^{nr}$, $k^{-1}\sigma(k)$ normalise T_0 et ait $\omega_{\bar{G}}(\sigma)$ pour image dans W^{θ}. Posons $\eta = k\nu e_0 k^{-1}$. On a $\eta \in \tilde{G}(F_v^{nr})$. De plus

$$\sigma(\eta) = \sigma(k)\sigma(\nu)\sigma(k^{-1})\sigma(e_0)$$

pour tout $\sigma \in \Gamma_v^{nr}$ parce $k \in G_{SC}^{\theta}$. Puis

$$\sigma(\eta) = \sigma(k)\omega_{\bar{G}}(\sigma)^{-1}(z(\sigma)\nu)\sigma(k^{-1})z(\sigma)^{-1}e_0.$$

En utilisant l'égalité $\omega_{\bar{G}}(\sigma)^{-1} = ad_{\sigma(k)^{-1}k}$, on obtient $\sigma(\eta) = \eta$, donc η appartient à $\tilde{G}(F_v)$. Par un calcul analogue, la relation 1.1(2) entraîne que la paire de Borel $(k(B_0 \cap G_{\nu e_0})k^{-1}, kT_0^{\theta,0}k^{-1})$ de G_η est définie sur F_v. Donc G_η est quasi-déployé. On a aussi $\eta = k\nu k^{-1}e_0 = k\nu k^{-1}\nu_0^{-1}\nu_0 e_0$. On sait que $\nu_0 e_0 \in \tilde{G}(F_v)$, donc $k\nu k^{-1}\nu_0^{-1} \in G(F_v)$. Or c'est un élément de K_v^{nr}. Donc il appartient à K_v. Puisque $\nu_0 e_0 \in \tilde{K}_v$, cela entraîne que $\eta \in \tilde{K}_v$. Il est clair que la classe de conjugaison stable de η a pour image $\mathcal{X}$ dans $\mathbf{Stab}(\tilde{G}(F_v))$. La conclusion de (i) est vérifiée.

Preuve de (ii). Soit $\eta \in \tilde{K}_v$ dont la classe de conjugaison stable s'envoie sur $\mathcal{X}$. On peut fixer un entier N premier à p de sorte que

- $\theta^N = 1$;
- le nombre d'éléments de $Z(G_{SC})$ divise N.

On introduit le groupe non connexe $G^+ = G \rtimes \{1, \theta, ..., \theta^{N-1}\}$, muni de l'action de Γ_{F_v} définie par $\sigma(g, \theta^j) = (z(\sigma)^{-j}\sigma(g), \theta^j)$. Alors $\tilde{G}$ s'identifie à la composante $G\theta$, ge_0 s'identifiant à $g\theta$ pour $g \in G$. Dans cette situation, on a défini en [W1] 5.2 la notion d'élément compact de $\tilde{G}(F_v)$: un élément est compact si et seulement si le sous-groupe qu'il engendre dans $G^+(F_v)$ est d'adhérence compacte. La condition $\eta \in \tilde{K}_v$ entraîne que le sous-groupe engendré par η est inclus dans $G^+(F_v) \cap (K_v^{nr} \times \{1, \theta, ..., \theta^{N-1}\})$, donc η est compact. D'après [W1] 5.2, on peut décomposer η en $u\eta_{p'}$, où $\eta_{p'}$ est d'ordre fini premier à p et $u \in G(F_v)$ est topologiquement unipotent. Ces éléments appartiennent à l'adhérence du groupe engendré par η. En particulier, ils commutent entre eux et le commutant de η dans G est l'intersection des commutants de u et $\eta_{p'}$. La description ci-dessus de l'adhérence du sous-groupe engendré par η montre que $u \in K_v$ et $\eta_{p'} \in \tilde{K}_v$. Le lemme [W1] 5.4 nous dit qu'il existe $k \in K_v^{nr}$ et un élément $\nu_{p'} \in T_0(\mathfrak{o}_v^{nr})$ d'ordre fini premier à p de sorte que $k\eta_{p'}k^{-1} = \nu_{p'}e_0$ et que le tore $T = ad_{k^{-1}}(T_0)$ soit défini sur F_v. L'élément u appartient à $Z_G(\eta_{p'}; F_v)$. La condition $v \notin V_{ram}$ implique que l'indice de $G_{\eta_{p'}}(F_v)$ dans ce groupe est premier à p. Puisque u est topologiquement unipotent, il appartient à $G_{\eta_{p'}}(F_v)$. On peut fixer $x \in G_{\eta_{p'}}$ tel que $xux^{-1} \in T$. Posons $u' = kxux^{-1}k^{-1}$. C'est un élément de T_0 qui est topologiquement unipotent. Posons $\nu = u'\nu_{p'}$. On a $kx\eta(kx)^{-1} = \nu e_0$. Par construction, les hypothèses (nr1) et (nr2) s'appliquent à cet élément ν. Pour $\alpha \in \Sigma(T_0)$, $(N\alpha)(\nu_{p'})$ est un élément d'ordre premier à p de $\mathfrak{o}_v^{nr,\times}$, tandis que $(N\alpha)(u')$ est un élément topologiquement unipotent de $\bar{F}_v^\times$, donc une unité de réduction 1 dans le corps résiduel. La condition (nr2) nous dit donc que, pour $\epsilon = 1$ dans le cas où α est de type 1 et pour $\epsilon = \pm 1$ dans le cas où α est de type 2 ou 3, la condition $(N\alpha)(\nu) = \epsilon$ est équivalente à $(N\alpha)(\nu_{p'}) = \epsilon$. D'après la description des commutants de νe_0 et $\nu_{p'}e_0$, cela entraîne que ces deux commutants ont même système de racines. On sait déjà que $G_\eta \subset G_{\eta_{p'}}$, donc $G_{\nu e_0} \subset G_{\nu_{p'}e_0}$. Ces deux groupes sont donc égaux et aussi $G_\eta = G_{\eta_{p'}}$. Les relations $u \in G_{\eta_{p'}} = G_\eta \subset G_u$ entraînent que u appartient au centre de $G_{\eta_{p'}}$. Mais alors l'élément x de la construction ci-dessus ne sert à rien : on a $xux^{-1} = u$. On reprend la construction avec $x = 1$. L'élément u' appartient maintenant à $T_0(\mathfrak{o}_v^{nr})$ et ν aussi. On a $k\eta k^{-1} = \nu e_0$. En reprenant les définitions, on voit que la relation $\nu \in T_0(\mathfrak{o}_v^{nr})$ entraîne la condition (nr3) tandis que la relation $k \in K_v^{nr}$ entraîne la condition (nr4). Enfin, les dernières assertions de (ii) résultent de l'égalité $G_\eta = G_{\eta_{p'}}$ et du lemme [W1] 5.4(ii) ou plus exactement de sa preuve, qui montre que ces assertions sont vérifiées par le groupe $G_{\eta_{p'}}$. $\square$

1.7 Paramètres et endoscopie

Soit $\mathbf{G}' = (G', \mathcal{G}', \tilde{s})$ une donnée endoscopique de $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$. On fixe une paire de Borel épinglée $\hat{\mathcal{E}} = (\hat{B}, \hat{T}, (\hat{E}_\alpha)_{\alpha \in \Delta})$ de $\hat{G}$ de sorte que $ad_{\tilde{s}}$ conserve $(\hat{B}, \hat{T})$. On en déduit un automorphisme $\hat{\theta}$ de $\hat{G}$ et une action galoisienne modifiée qui conserve $\hat{\mathcal{E}}$, cf. [I] 1.4. On écrit $\tilde{s} = s\hat{\theta}$. On choisit une paire de Borel épinglée $\hat{\mathcal{E}}'$ de $\hat{G}'$ dont la paire de Borel sous-jacente soit $(\hat{B} \cap \hat{G}', \hat{T}^{\hat{\theta},0})$. On note $\mathcal{E}'^* = (B'^*, T'^*, (E'_\alpha)_{\alpha \in \Delta'})$ <u>la</u> paire de Borel épinglée de G'. De l'injection naturelle $\hat{T}^{\hat{\theta},0} \subset \hat{T}$ se déduit un homomorphisme

$$\xi : T^* \to T^*/(1-\theta^*)(T^*) \simeq T'^*.$$

En munissant ces objets des actions quasi-déployées, il y a un cocycle $\omega_{G'} : \Gamma_F \to W^{\theta^*}$ de sorte que $\sigma_{G'^*} \circ \xi = \xi \circ \omega_{G'}(\sigma) \circ \sigma_{G^*}$ pour tout $\sigma \in \Gamma_F$. Le groupe $W^{G'}$ s'identifie à un sous-groupe de W^{θ^*} en identifiant $w' \in W^{G'}$ à l'unique élément $w \in W^{\theta^*}$ tel que $\xi \circ w = w' \circ \xi$. On a décrit en [I] 1.6 l'ensemble de racines $\Sigma(T'^*)$.

Il y a aussi un homomorphisme naturel $\mathcal{Z}(\tilde{G}) \to \mathcal{Z}(\tilde{G}')$ qui est équivariant pour les actions galoisiennes. On en déduit un isomorphisme

$$\tilde{\xi} : (T^*/(1-\theta^*)(T^*)) \times_{\mathcal{Z}(G)} \mathcal{Z}(\tilde{G}) \simeq T'^* \times_{Z(G')} \mathcal{Z}(\tilde{G}').$$

Soit $(\mu', \omega_{\bar{G}'}) \in Stab(\tilde{G}'(F))$. Par l'inverse de l'isomorphisme précédent, μ' s'identifie à un élément $\mu \in (T^*/(1-\theta^*)(T^*)) \times_{\mathcal{Z}(G)} \mathcal{Z}(\tilde{G})$. L'ensemble de racines $\Sigma(\mu')$ ne s'identifie pas à un sous-ensemble de $\Sigma(\mu)$ car le premier ensemble est formé d'éléments $N\alpha$ ou

$2N\alpha$ pour $\alpha \in \Sigma(T^*)$ tandis que le second est formé d'éléments α_{res}. Mais, pour tout $\beta' \in \Sigma(\mu')$, il existe un unique $\beta \in \Sigma(\mu)$ de sorte que la restriction de β' à $T^{*,\theta^*,0}$ soit de la forme $b\beta$, avec $b \in \mathbb{Q}$, $b > 0$. Pour une raison qui apparaîtra plus tard, on note $\Sigma^{\bar{H}}$ l'ensemble de ces racines β. Rappelons plus précisément cette correspondance. On fixe $\nu \in T^*$ et $\bar{e} \in \mathcal{Z}(\tilde{G})$ tel que μ soit l'image de $(\nu, \bar{e})$. Alors

$$\Sigma(\mu') = \{N\alpha; \alpha \in \Sigma(T^*), \alpha \text{ de type } 1, (N\hat{\alpha})(s) = 1, (N\alpha)(\nu) = 1\}$$

$$\cup\{2N\alpha; \alpha \in \Sigma(T^*), \alpha \text{ de type } 2, (N\hat{\alpha})(s) = 1, (N\alpha)(\nu) = 1\}$$

$$\cup\{2N\alpha; \alpha \in \Sigma(T^*), \alpha \text{ de type } 2, (N\hat{\alpha})(s) = 1, (N\alpha)(\nu) = -1\}$$

$$\cup\{N\alpha; \alpha \in \Sigma(T^*), \alpha \text{ de type } 3, (N\hat{\alpha})(s) = -1, (N\alpha)(\nu) = 1\}.$$

On envoie un élément $N\alpha$ du premier ensemble sur α_{res}, un élément $2N\alpha$ du deuxième sur α_{res}, un élément $2N\alpha$ du troisième sur $2\alpha_{res}$, un élément $N\alpha$ du quatrième sur $\alpha_{res}/2$. On vérifie que $\Sigma^{\bar{H}}$ est un sous-système de racines de $\Sigma(\mu)$, dont le groupe de Weyl n'est autre que $W^{G'}(\mu')$. Cela entraîne que $W^{G'}(\mu')$ est un sous-groupe de $W(\mu)$.

L'application $\sigma \mapsto \omega_{\bar{G}'}(\sigma)\omega_{G'}(\sigma)$ est un cocycle de Γ_F dans W^{θ^*}. Pour tout $\sigma \in \Gamma_F$, $\omega_{\bar{G}'}(\sigma)\omega_{G'}(\sigma)\sigma_{G^*} = \omega_{\bar{G}'}(\sigma) \circ \sigma_{G'^*}$ fixe μ. Le couple formé de μ et de ce cocycle appartient donc à $\underline{Stab}(\tilde{G}(F))$. On note $(\mu, \omega_{\bar{G}})$ l'unique élément de $Stab(\tilde{G}(F))$ qui lui est équivalent. On note $\omega_{\tilde{H}}$ l'unique cocycle de Γ_F dans $W(\mu)$ tel que $\omega_{\bar{H}}(\sigma) \circ \omega_{\bar{G}}(\sigma) = \omega_{\bar{G}'}(\sigma)\omega_{G'}(\sigma)$ pour tout σ. On a ainsi défini une application

$$\begin{array}{ccc} Stab(\tilde{G}'(F)) & \to & Stab(\tilde{G}(F)) \\ (\mu', \omega_{\bar{G}'}) & \mapsto & (\mu, \omega_{\bar{G}}). \end{array}$$

On vérifie qu'elle se quotiente en une application

$$(1) \qquad \mathbf{Stab}(\tilde{G}'(F)) \to \mathbf{Stab}(\tilde{G}(F)).$$

Celle-ci ne dépend pas du choix de la paire de Borel épinglée $\hat{\mathcal{E}}$. Ses fibres sont évidemment finies.

On a

(2) supposons $\mathbf{G}'$ elliptique ; soit $\mathcal{X}' \in \mathbf{Stab}(\tilde{G}'(F))$, notons $\mathcal{X}$ son image par l'application ci-dessus ; si $\mathcal{X}'$ est elliptique, alors $\mathcal{X}$ l'est.

Preuve. On reprend les constructions précédentes en supposant que $(\mu', \omega_{\bar{G}'})$ est elliptique. Avec les notations de 1.1, on a l'inclusion $Z(G)^{\Gamma_F,\theta,0} \subset Z(\bar{G})^{\Gamma_F,0}$ et on doit prouver que c'est une égalité. Puisqu'il s'agit de groupes connexes et que l'homomorphisme naturel $T^{*,\theta^*,0} \to T^*/(1-\theta^*)(T^*)$ a un noyau fini, il revient au même de prouver que les images de ces groupes dans $T^*/(1-\theta^*)(T^*)$ sont égales. L'action galoisienne sur $Z(\bar{G})$ est $\sigma \mapsto \omega_{\bar{G}}(\sigma)\sigma_{G^*}$. Puisque $\omega_{\bar{H}}(\sigma)$ appartient au groupe $W(\mu) = W^{\bar{G}}$, son action sur $Z(\bar{G})$ est triviale et on peut aussi bien remplacer l'action précédente par $\sigma \mapsto \omega_{\bar{H}}(\sigma)\omega_{\bar{G}}(\sigma)\sigma_{G^*} = \omega_{\bar{G}'}(\sigma)\sigma_{G'^*}$. Un élément $x_* \in X_*(Z(\bar{G})^0)$ annule l'ensemble $\Sigma(\mu)$, donc aussi $\Sigma^{\bar{H}}$. Son image dans $X_*(T^*/(1-\theta^*)(T^*))$ annule donc $\Sigma^{G'}(\mu')$. Cela montre que $Z(\bar{G})^0$ s'envoie dans $Z(\bar{G}')^0$. Donc $Z(\bar{G})^{\Gamma_F,0}$ s'envoie dans $Z(\bar{G}')^{\Gamma_F,0}$, où l'action de Γ_F est l'action ci-dessus. Cette action sur $Z(\bar{G}')$ est la même qu'en 1.1. L'ellipticité de $\mathcal{X}'$ nous dit que $Z(\bar{G}')^{\Gamma_F,0} = Z(G')^{\Gamma_F,0}$. Mais l'ellipticité de $\mathbf{G}'$ signifie que ce groupe est précisément l'image de $Z(G)^{\Gamma_F,\theta,0}$. D'où la conclusion. $\square$

Si l'on remplace le corps de base F par un complété F_v, on a une application similaire à (1). Soit v une place de F telle que $v \notin V_{ram}(\mathbf{G}')$. Soit $\mathcal{X}' \in \mathbf{Stab}(\tilde{G}'(F_v))$, notons $\mathcal{X} \in \mathbf{Stab}(\tilde{G}(F_v))$ son image par cette application. On a

(3) si $\mathcal{X}$ vérifie la condition (nr1) de 1.6, resp. (nr2), alors $\mathcal{X}'$ vérifie la même condition ; $\mathcal{X}$ vérifie la condition (nr3) si et seulement si $\mathcal{X}'$ vérifie la même condition.

Quand on passe de $\mathcal{X}$ à $\mathcal{X}'$, les termes $(N\alpha)(\nu)$ de ces conditions sont remplacés par les mêmes termes ou éventuellement par $(2N\alpha)(\nu)$ pour α de type 2 ou 3. De plus, pour G', toutes les racines sont de type 1. La première assertion s'ensuit. D'autre part, l'espace $\tilde{K}'_v$ est défini de telle sorte que, par l'isomorphisme $\tilde{\xi}$ défini plus haut, le terme $\mu(\tilde{K}_v)$ s'identifie à $\mu(\tilde{K}'_v)$. D'où la seconde assertion.

On a aussi

(4) si $\mathcal{X}'$ vérifie la condition (nr4), alors $\mathcal{X}$ la vérifie aussi.

Soit σ dans le groupe d'inertie I_v. Avec les notations de la construction ci-dessus, σ_{G^*} agit trivialement sur $\Sigma(T^*)$ puisque $v \notin V_{ram}$, $\omega_{G'}(\sigma) = 1$ puisque $v \notin V_{ram}(\mathbf{G}')$ et $\omega_{\bar{G}'}(\sigma) = 1$ puisque $\mathcal{X}'$ vérifie (nr4). Donc $\omega_{\bar{G}}(\sigma) = \omega_{\bar{H}}(\sigma)^{-1}$. Cet élément appartient à $W(\mu)$ et conserve $\Sigma_+(\mu)$. C'est donc l'identité. $\square$

1.8 Retour sur la correspondance entre classes de conjugaison stable

Soit $\mathbf{G}' = (G', \mathcal{G}', \tilde{s})$ une donnée endoscopique de $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$ et soit V un ensemble fini de places de F. On a un diagramme

$$\begin{array}{ccc} \tilde{G}'_{ss}(F_V)/st-conj & ... & \tilde{G}_{ss}(F_V)/st-conj \\ \chi^{\tilde{G}'_V}\downarrow & & \downarrow\chi^{\tilde{G}_V} \\ \mathbf{Stab}(\tilde{G}'(F_V)) & \to & \mathbf{Stab}(\tilde{G}(F_V)) \end{array}$$

La ligne horizontale du haut n'est qu'une correspondance, précisément une fonction définie sur un sous-ensemble de $\tilde{G}'_{ss}(F_V)/st-conj$, à valeurs dans $\tilde{G}_{ss}(F_V)/st-conj$. L'application $\chi^{\tilde{G}'_V}$ est bijective (lemme 1.3). On considère maintenant le cas où V est réduit à une seule place v.

Lemme. *Soit $\mathcal{O}' \in \tilde{G}'_{ss}(F_v)/st-conj$. Notons $\mathcal{X}'$ son image par $\chi^{\tilde{G}'_v}$ et $\mathcal{X}$ l'image de $\mathcal{X}'$ dans $\mathbf{Stab}(\tilde{G}(F_v))$.*

(i) Supposons que $\mathcal{O}'$ corresponde à une classe $\mathcal{O} \in \tilde{G}_{ss}(F_v)/st-conj$ par la correspondance supérieure du diagramme. Alors $\chi^{\tilde{G}_v}(\mathcal{O}) = \mathcal{X}$.

(ii) Supposons que $v \notin V_{ram}$ et que $\mathcal{X}$ vérifie les conditions (nr3) et (nr4) de 1.6. Alors $\mathcal{O}'$ correspond à une classe $\mathcal{O} \in \tilde{G}_{ss}(F_v)/st-conj$ et on a $\chi^{\tilde{G}_v}(\mathcal{O}) = \mathcal{X}$.

Preuve. Prouvons (i). On fixe des paires de Borel épinglées dans les groupes duaux comme en 1.7. Puisque $\mathcal{O}$ correspond à $\mathcal{O}'$, on peut fixer un diagramme $(\epsilon, B', T', B, T, \eta)$ (sur le corps de base F_v) avec $\epsilon \in \mathcal{O}'$ et $\eta \in \mathcal{O}$. On complète (B,T) et (B',T') en des paires de Borel épinglées $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$, que l'on peut identifier à $\mathcal{E}^*$ et $\mathcal{E}'^*$. On écrit $\eta = \nu e$, avec $\nu \in T$ et $e \in Z(\tilde{G}, \mathcal{E})$. On a alors $\epsilon = \xi(\nu)e'$ où e' est l'image de e dans $\mathcal{Z}(\tilde{G}') \simeq Z(\tilde{G}', \mathcal{E}')$. Donc les termes μ et μ' coïncident dans $(T/(1-\theta)(T)) \times_{\mathcal{Z}(G)} \mathcal{Z}(\tilde{G})$. On introduit les cochaînes $u_{\mathcal{E}}$, u_η, $u_{\mathcal{E}'}$ et u_ϵ comme en 1.2. Soit $\sigma \in \Gamma_F$. Parce que les éléments η et ϵ et les tores T et T' sont définis sur F_v, les éléments $u_{\mathcal{E}}(\sigma)$ et $u_\eta(\sigma)$ normalisent T et les éléments $u_{\mathcal{E}'}(\sigma)$ et $u_\epsilon(\sigma)$ normalisent T'. Leurs images dans W sont invariantes par θ (cf. [I] 1.3(3)). On les note par des lettres grasses : $\mathbf{u}_{\mathcal{E}}(\sigma)$ est l'image de $u_{\mathcal{E}}(\sigma)$ dans W^θ. Les définitions entraînent $\omega_\eta(\sigma)=\mathbf{u}_\eta(\sigma)\mathbf{u}_{\mathcal{E}}(\sigma)^{-1}$, $\omega_\epsilon(\sigma)=\mathbf{u}_\epsilon(\sigma)\mathbf{u}_{\mathcal{E}'}(\sigma)^{-1}$. L'homomorphisme ξ est équivariant pour les actions naturelles. Donc

$$\xi\circ\mathbf{u}_{\mathcal{E}}(\sigma)^{-1}\circ\sigma_{G^*}=\mathbf{u}_{\mathcal{E}'}(\sigma)^{-1}\circ\sigma_{G'^*}\circ\xi.$$

Il en résulte que

$$\omega_{G'}(\sigma)=\mathbf{u}_{\mathcal{E}'}(\sigma)\mathbf{u}_{\mathcal{E}}(\sigma)^{-1}.$$

On vérifie que $\omega_\epsilon(\sigma)\omega_{G'}(\sigma)\sigma_{G^*}$ conserve μ. On peut donc introduire la cochaîne $\omega_{\bar{H}}$ à valeurs dans $W(\mu)$ telle que $\omega_{\bar{H}}(\sigma)^{-1}\omega_\epsilon(\sigma)\omega_{G'}(\sigma)\sigma_{G^*}$ conserve $\Sigma_+(\mu)$. Pour prouver que $\chi^{\tilde{G}_v}(\mathcal{O})=\mathcal{X}$, il suffit de prouver que

$$\omega_{\bar{H}}(\sigma)^{-1}\omega_\epsilon(\sigma)\omega_{G'}(\sigma)=\omega_\eta(\sigma)$$

pour tout $\sigma\in\Gamma_{F_v}$. Puisque, composés avec σ_{G^*}, ces deux éléments conservent $\Sigma_+(\mu)$, il suffit de prouver que leurs images dans $W(\mu)\backslash W^{\theta^*}$ sont égales. On a

$$\omega_{\bar{H}}(\sigma)^{-1}\omega_\epsilon(\sigma)\omega_{G'}(\sigma)=\omega_{\bar{H}}(\sigma)^{-1}\mathbf{u}_\epsilon(\sigma)\mathbf{u}_{\mathcal{E}'}(\sigma)^{-1}\omega_{G'}(\sigma)=\omega_{\bar{H}}(\sigma)^{-1}\mathbf{u}_\epsilon(\sigma)\mathbf{u}_{\mathcal{E}}(\sigma)^{-1},$$

$$\omega_\eta(\sigma)=\mathbf{u}_\eta(\sigma)\mathbf{u}_{\mathcal{E}}(\sigma)^{-1}.$$

Dans le membre de droite de la première égalité, les deux premiers termes appartiennent à $W^{G'}(\mu')\subset W(\mu)$. Dans le membre de droite de la seconde, le premier terme appartient à $W(\mu)$. Les deux termes appartiennent donc à $W(\mu)\mathbf{u}_{\mathcal{E}}(\sigma)^{-1}$, ce qui prouve l'assertion cherchée.

Prouvons (ii). On peut choisir $\epsilon\in\mathcal{O}'$ tel que G'_ϵ soit quasi-déployé. On fixe une paire de Borel (B',T') de G' conservée par ad_ϵ et telle que $(B'\cap G_\epsilon,T')$ soit définie sur F_v. D'après le lemme 1.6(i), $\mathcal{X}$ est l'image par $\chi^{\tilde{G}_v}$ d'une classe $\mathcal{O}\in\tilde{G}_{ss}(F_v)/st-conj$ et on peut choisir un élément $\eta\in\mathcal{O}$ tel que G_η soit quasi-déployé. On choisit une paire de Borel $(B_\star,T_\star)$ de G conservée par ad_η et telle que $(B_\star\cap G_\eta,T_\star\cap G_\eta)$ soit définie sur F_v. A l'aide des paires (B',T') et $(B_\star,T_\star)$, on construit les couples $(\mu_\epsilon,\omega_\epsilon)$ et (μ_η,ω_η) comme en 1.2. De $(\mu_\epsilon,\omega_\epsilon)$ se déduit comme en 1.7 un élément de $Stab(\tilde{G}(F_v))$. L'hypothèse que $\mathcal{X}$ est l'image de $\mathcal{X}'$ signifie que cet élément est conjugué à (μ_η,ω_η). En appliquant 1.2(3), on voit que l'on peut remplacer la paire $(B_\star,T_\star)$ par une autre qui possède les mêmes propriétés que ci-dessus, de sorte qu'après ce remplacement, le couple (μ_η,ω_η) soit égal à celui déduit de $(\mu_\epsilon,\omega_\epsilon)$. On complète les paires (B',T') et $(B_\star,T_\star)$ en des paires de Borel épinglées $\mathcal{E}'$ et $\mathcal{E}_\star$. Ecrivons $\eta=\nu_\star e_\star$ avec $\nu_\star\in T_\star$ et $e_\star\in Z(\tilde{G},\mathcal{E}_\star)$ et $\epsilon=\nu'e'$, où $\nu'\in T'$ et $e'\in Z(\tilde{G}',\mathcal{E}')$ est l'image de $e_\star$. On a l'homomorphisme usuel $\xi_{T_\star,T'}:T_\star\to T'$. On voit que l'égalité des couples ci-dessus signifie que $\xi_{T_\star,T'}(\nu_\star)=\nu'$ et qu'il existe un cocycle $\sigma\mapsto\omega_{\bar{H}}(\sigma)$ de Γ_{F_v} dans W^{G_η} de sorte que l'on ait la relation $\sigma_{G'}\circ\xi_{T_\star,T'}=\xi_{T_\star,T'}\circ\omega_{\bar{H}}(\sigma)\circ\sigma_G$. Parce que G_η est quasi-déployé, on peut appliquer [K1] corollaire 2.2 : on peut fixer $g\in G_{\eta,SC}$ de sorte que le tore $T=ad_{g^{-1}}(T_\star)$ soit défini sur F_v et que, pour tout $\sigma\in\Gamma_{F_v}$, l'élément $g\sigma(g)^{-1}$ normalise $T_\star$ et ait $\omega_{\bar{H}}(\sigma)$ pour image dans W^{G_η}. Posons $\mathcal{E}=ad_{g^{-1}}(\mathcal{E}_\star)$. Son tore sous-jacent est T et on note B le sous-groupe de Borel sous-jacent. Parce que ad_g fixe η, on a l'égalité $\eta=\nu e$, où $\nu=ad_{g^{-1}}(\nu_\star)$ et $e=ad_{g^{-1}}(e_\star)$. On a aussi $\xi_{T,T'}=\xi_{T_\star,T'}\circ ad_g$. On vérifie alors que $\xi_{T,T'}(\nu)=\nu'$ et que l'on a l'égalité $\sigma_{G'}\circ\xi_{T,T'}=\xi_{T,T'}\circ\sigma$. Mais cela signifie que $(\epsilon,B',T',B,T,\eta)$ est un diagramme. Donc $\mathcal{O}$ correspond à $\mathcal{O}'$. Cela prouve la première assertion de (ii). La seconde résulte de (i). $\square$

1.9 Distributions associées à un paramètre

Soit $\mathcal{X} \in \mathbf{Stab}(\tilde{G}(F))$. On peut représenter $\mathcal{X}$ par un élément $(\mu, \omega_{\bar{G}}) \in Stab(\tilde{G}(F))$ et relever μ en $(\nu, \bar{e})$, avec $\nu \in T^*$ et $\bar{e} \in \mathcal{Z}(\tilde{G})$. On considère les conditions (nr1),...,(nr4) de 1.6 pour une place $v \in Val(F) - V_{ram}$. Il est clair que chacune d'elles est vérifiée sauf pour un ensemble fini de places. On note $S(\mathcal{X})$ le plus petit ensemble de places contenant V_{ram} tel que (nr1) et (nr2) soient vérifiées hors de $S(\mathcal{X})$. On note $S(\mathcal{X}, \tilde{K})$ le plus petit ensemble de places contenant V_{ram} tel que les conditions (nr1), (nr2), (nr3) et (nr4) soient vérifiées hors de $S(\mathcal{X}, \tilde{K})$. On a évidemment $S(\mathcal{X}) \subset S(\mathcal{X}, \tilde{K})$.

Si $\mathcal{X}$ est l'image par $\chi^{\tilde{G}}$ d'une classe de conjugaison stable dans $\tilde{G}_{ss}(F)$, l'ensemble $S(\mathcal{X})$ coïncide avec l'ensemble $S(\mathcal{C})$ défini en [VI] 2.3 pour toute classe de conjugaison $\mathcal{C}$ contenue dans cette classe de conjugaison stable.

Soient $\mathcal{X} \in \mathbf{Stab}(\tilde{G}(F))$ et V un ensemble fini de places de F contenant V_{ram}. On définit une distribution $A^{\tilde{G}}(V, \mathcal{X}, \omega) \in D_{géom}(\tilde{G}(F_V)) \otimes Mes(G(F_V))^*$. Elle est nulle si $\mathcal{X}$ n'appartient pas à l'image de l'application $\chi^{\tilde{G}}$. Supposons que $\mathcal{X} = \chi^{\tilde{G}}(\mathcal{O})$, où $\mathcal{O}$ est une classe de conjugaison stable semi-simple. Pour toute classe de conjugaison ordinaire $\mathcal{C} \in \tilde{G}_{ss}(F)/conj$, on a défini la distribution $A^{\tilde{G}}(V, \mathcal{C}, \omega)$ en [VI] 2.3. On pose

$$A^{\tilde{G}}(V, \mathcal{X}, \omega) = \sum_{\mathcal{C} \in \tilde{G}_{ss}(F)/conj, \mathcal{C} \subset \mathcal{O}} A^{\tilde{G}}(V, \mathcal{C}, \omega).$$

Les termes de cette somme sont presque tous nuls. En effet, pour tout $v \in V$, la classe de conjugaison stable dans $\tilde{G}(F_v)$ engendrée par $\mathcal{O}$ se décompose en un nombre fini de classes de conjugaison par $G(F_v)$. Il existe donc un sous-ensemble fini $\tilde{U}_V$ de $\tilde{G}(F_V)$ tel que, pour tout $\eta \in \mathcal{O}$, la classe de conjugaison par $G(F_V)$ de η coupe $\tilde{U}_V$. De plus, un terme $A^{\tilde{G}}(V, \mathcal{C}, \omega)$ n'est non nul que si, pour tout $v \notin V$, la classe de conjugaison par $G(F_v)$ engendrée par $\mathcal{C}$ coupe $\tilde{K}_v$, cf. [VI] 2.3(6). Le lemme [VI] 2.1 entraîne la finitude affirmée.

On a

(1) si $S(\mathcal{X}, \tilde{K}) - S(\mathcal{X}) \not\subset V$, alors $A^{\tilde{G}}(V, \mathcal{X}, \omega) = 0$.

C'est clair si $\mathcal{X}$ n'est pas dans l'image de $\chi^{\tilde{G}}$. Si $\mathcal{X} = \chi^{\tilde{G}}(\mathcal{O})$, considérons une place $v \in S(\mathcal{X}, \tilde{K}) - S(\mathcal{X})$ qui n'appartient pas à V. En v, les conditions (nr1) et (nr2) sont vérifiées, mais au moins une des conditions (nr3) ou (nr4) ne l'est pas. Le lemme 1.6(ii) nous dit qu'il n'existe aucune classe $\mathcal{C} \subset \mathcal{O}$ telle que la classe engendrée par $\mathcal{C}$ dans $\tilde{G}(F_v)$ coupe $\tilde{K}_v$. Toutes les distributions $A^{\tilde{G}}(V, \mathcal{C}, \omega)$ intervenant sont donc nulles. $\square$

On a

(2) si $S(\mathcal{X}) \subset V$ et si $\mathcal{X}$ n'est pas elliptique, alors $A^{\tilde{G}}(V, \mathcal{X}, \omega) = 0$.

Pour toute classe $\mathcal{C} \subset \mathcal{O}$, on a $S(\mathcal{X}) = S(\mathcal{C})$ et l'hypothèse que $\mathcal{X}$ n'est pas elliptique entraîne que $\mathcal{C}$ ne l'est pas non plus. D'après la définition de [VI] 2.3, on a alors $A^{\tilde{G}}(V, \mathcal{C}, \omega) = 0$. $\square$

En 1.1 et 1.2 on a associé à $\mathcal{X}$ un groupe $\bar{G}$ et un caractère automorphe de $\bar{G}(\mathbb{A}_F)$. Le couple formé de ce groupe et de ce caractère n'est défini qu'à isomorphisme près mais la condition que la restriction du caractère à $Z(\bar{G}; \mathbb{A}_F)$ est triviale est insensible à un tel isomorphisme. Par abus de langage, nous la formulerons : la restriction de ω à $Z(\bar{G}; \mathbb{A}_F)$ est triviale. On a

(3) si les restrictions de ω à $Z(G; \mathbb{A}_F)^\theta$ et à $Z(\bar{G}; \mathbb{A}_F)$ ne sont pas toutes deux triviales, alors $A^{\tilde{G}}(V, \mathcal{X}, \omega) = 0$.

En effet, soient $\mathcal{C} \subset \mathcal{O}$ et $\dot{\gamma} \in \mathcal{C}$. Alors la restriction de ω à $Z(\bar{G}; \mathbb{A}_F)$ est triviale si et seulement si la restriction de ω à $Z(G_{\dot\gamma};\mathbb{A}_F)$ est triviale. L'assertion résulte alors de [VI] proposition 2.3(iv).

1.10 Distributions stables et endoscopiques associées à un paramètre

On fixe un ensemble fini V de places de F contenant V_{ram}.

Supposons $(G,\tilde G,\mathbf{a})$ quasi-déployé et à torsion intérieure. Soit $\mathcal{X}\in\mathbf{Stab}(\tilde G(F))$. On va définir une distribution $SA^{\tilde G}(V,\mathcal{X})\in D_{géom}(\tilde G(F_V))\otimes Mes(G(F_V))^*$. Comme toujours, on a besoin de supposer par récurrence que cette distribution vérifie certaines propriétés. Il y a des propriétés formelles qui permettent de "recoller" ces distributions dans la situation habituelle, cf. [VI] 1.15. Ce sont les mêmes que dans cette référence et on les abandonne au lecteur. On donnera toutefois dans le paragraphe suivant des formules plus explicites dans la situation "avec caractère central". Comme en [VI] 5.2(1), il y a une condition concernant les espaces hyperspéciaux $\tilde K_v$ pour $v\not\in V$. La définition fournit une distribution qui dépend de ces espaces. On doit savoir que

(1) elle ne dépend que des classes de conjugaison par $G_{AD}(F_v)$ des $\tilde K_v$ pour $v\not\in V$.

Surtout, on doit supposer par récurrence que cette distribution $SA^{\tilde G}(V,\mathcal{X})$ est stable. Modulo ces hypothèses, soit $\mathbf{G}'=(G',\mathcal{G}',s)$ une donnée endoscopique de $(G,\tilde G,\mathbf{a})$ relevante et non ramifiée hors de V, avec $dim(G'_{SC})<dim(G_{SC})$. Soit $\mathcal{X}'\in\mathbf{Stab}(\tilde G'(F))$. Alors on peut définir $SA^{\mathbf{G}'}(V,\mathcal{X}')\in D^{st}_{géom}(\mathbf{G}'_V)\otimes Mes(G'(F_V))^*$. On pose (avec les notations de [VI] 5.1) :

$$(2)\qquad SA^{\tilde G}(V,\mathcal{X})=A^{\tilde G}(V,\mathcal{X})-\sum_{\mathbf{G}'\in\mathcal{E}(\tilde G,V),G'\neq G}\ \sum_{\mathcal{X}'\in\mathbf{Stab}(\tilde G'(F)),\mathcal{X}'\mapsto\mathcal{X}} i(\tilde G,\tilde G')transfert(SA^{\mathbf{G}'}(V,\mathcal{X}')),$$

où on a noté $\mathcal{X}'\mapsto\mathcal{X}$ l'application (1) de 1.7.

On revient au cas où $(G,\tilde G,\mathbf{a})$ est quelconque. Pour $\mathcal{X}\in\mathbf{Stab}(\tilde G(F))$, on pose

$$(3)\qquad A^{\tilde G,\mathcal{E}}(V,\mathcal{X},\omega)=\sum_{\mathbf{G}'\in\mathcal{E}(\tilde G,\mathbf{a},V)}\ \sum_{\mathcal{X}'\in\mathbf{Stab}(\tilde G'(F)),\mathcal{X}'\mapsto\mathcal{X}} i(\tilde G,\tilde G')transfert(SA^{\mathbf{G}'}(V,\mathcal{X}')).$$

Remarque. Comme souvent, le cas où $(G,\tilde G,\mathbf{a})$ est quasi-déployé et à torsion intérieure est un peu particulier. Dans ce cas, les hypothèses de récurrence ne s'appliquent pas à la donnée endoscopique principale $\mathbf{G}$. Il convient de remplacer le terme $transfert(SA^{\mathbf{G}}(V,\mathcal{X}))$ intervenant dans la somme par $SA^{\tilde G}(V,\mathcal{X})$. On a alors $A^{\tilde G,\mathcal{E}}(V,\mathcal{X})=A^{\tilde G}(V,\mathcal{X})$ par définition de ce terme $SA^{\tilde G}(V,\mathcal{X})$.

Théorème (i) (à prouver). *Pour tout $\mathcal{X}\in\mathbf{Stab}(\tilde G(F))$, on a l'égalité $A^{\tilde G,\mathcal{E}}(V,\mathcal{X},\omega)=A^{\tilde G}(V,\mathcal{X},\omega)$.*

Théorème (ii). *Supposons $(G,\tilde G,\mathbf{a})$ quasi-déployé et à torsion intérieure. Alors, pour tout $\mathcal{X}\in\mathbf{Stab}(\tilde G(F))$, $SA^{\tilde G}(V,\mathcal{X})$ est stable et vérifie (1).*

Le théorème (ii) sera prouvé dans cet article, cf. 3.4. Le théorème (i) ne sera entièrement prouvé que plus tard. Toutefois, dans cet article, nous prouverons ce théorème sauf pour des triplets $(G,\tilde{G},\mathbf{a})$ particuliers. Pour ceux-ci, le théorème sera prouvé sauf pour des $\mathcal{X}$ particuliers, qui sont en nombre fini. On renvoie à 3.5 pour des assertions précises.

1.11 Formules dans la situation avec caractère central

On suppose $(G,\tilde{G},\mathbf{a})$ quasi-déployé et à torsion intérieure. On suppose donnés une extension

$$1\to C_1\to G_1\to G$$

où C_1 est un tore central induit, une extension compatible $\tilde{G}_1\to\tilde{G}$ où $\tilde{G}_1$ est encore à torsion intérieure et un caractère automorphe λ_1 de $C_1(\mathbb{A}_F)$. On a défini l'ensemble de places $V_{1,ram}$ en [VI] 1.15. Pour $v\not\in V_{1,ram}$, on fixe un espace hyperspécial $\tilde{K}_{1,v}\subset\tilde{G}_1(F_v)$ au-dessus de $\tilde{K}_v$. On impose la condition de compatibilité globale habituelle : pour $\gamma_1\in\tilde{G}_1(F)$, on a $\gamma_1\in\tilde{K}_{1,v}$ pour presque tout v. On a une suite exacte

$$0\to\mathfrak{A}_{C_1}\to\mathfrak{A}_{G_1}\to\mathfrak{A}_G\to 0$$

On a fixé en [VI] 1.3 une mesure de Haar sur $\mathfrak{A}_G$. On en fixe sur les deux autres groupes de sorte que la suite soit compatible aux mesures.

Introduisons <u>*les*</u> paires de Borel épinglées de G et G_1, dont on note les tores T^* et T_1^*. On a des applications naturelles $T_1^*\to T^*$ et $\mathcal{Z}(\tilde{G}_1)\to\mathcal{Z}(\tilde{G})$. On en déduit une application

$$\begin{array}{ccc}T_1^*\times_{Z(G_1)}\mathcal{Z}(\tilde{G}_1)&\to&T^*\times_{Z(G)}\mathcal{Z}(\tilde{G})\\ \mu_1&\mapsto&\mu\end{array}$$

dont les fibres sont isomorphes à C_1. D'où une application $Stab(\tilde{G}_1(F))\to Stab(\tilde{G}(F))$, qui, à $(\mu_1,\omega_{\bar{G}})$, associe $(\mu,\omega_{\bar{G}})$. Elle se quotiente en une application

$$(1)\qquad \mathbf{Stab}(\tilde{G}_1(F))\to\mathbf{Stab}(\tilde{G}(F)).$$

Celle-ci traduit simplement l'application de projection $\tilde{G}_{1,ss}(F)/st-conj\to\tilde{G}_{ss}(F)/st-conj$. Remarquons que les fibres de cette application ne sont pas isomorphes à $C_1(F)$ en général, deux éléments de $Stab(\tilde{G}_1(F))$ de la forme $(\mu_1,\omega_{\bar{G}})$ et $(c\mu_1,\omega_{\bar{G}})$, avec $c\in C_1(F)$, $c\neq 1$, pouvant avoir la même image dans $\mathbf{Stab}(\tilde{G}_1(F))$.

Soit V un ensemble fini de places contenant $V_{1,ram}$. Fixons des mesures dg sur $G(\mathbb{A}_F)$ et dc sur $C_1(\mathbb{A}_F)$, dont on déduit une mesure dg_1 sur $G_1(\mathbb{A}_F)$. On identifie ces mesures à des mesures sur $G(F_V)$, $C_1(F_V)$ et $G_1(F_V)$, cf. [VI] 1.1. On rappelle que les distributions définies en 1.9 et 1.10 dépendent de l'espace $\tilde{K}^V=\prod_{v\not\in V}\tilde{K}_v$, bien que l'on n'ait pas fait figurer cet espace dans la notation. Dans les formules qui suivent, on insère si besoin est cet espace dans la notation, de façon que l'on espère compréhensible.

Soit $\mathcal{X}\in\mathbf{Stab}(\tilde{G}(F))$. Soit $f\in C_{c,\lambda_1}^\infty(\tilde{G}_1(F_V))$. On fixe une fonction $\phi\in C_c^\infty(\tilde{G}_1(F_V))$ de sorte que

$$f=\int_{C_1(F_V)}\phi^c\lambda_1(c)\,dc.$$

La formule [VI] 2.5(14) donne immédiatement la variante $A_{\lambda_1}^{\tilde{G}_1}(V,\mathcal{X})$ de la distribution définie en 1.9 sous la forme

$$(2)\qquad I_{\lambda_1}^{\tilde{G}_1}(A_{\lambda_1}^{\tilde{G}_1}(V,\mathcal{X}),f\otimes dg)=mes(\mathfrak{A}_{C_1}C_1(F)\backslash C_1(\mathbb{A}_F))^{-1}\int_{C_1(F)\backslash C_1(\mathbb{A}_F)}$$

$$\sum_{\mathcal{X}_1\in Fib(\mathcal{X})} I^{\tilde{G}_1}(A^{\tilde{G}_1}(V,\mathcal{X}_1,c^V\tilde{K}_1^V),\phi^{c_V}\otimes dg_1)\lambda_1(c)\,dc,$$

où $Fib(\mathcal{X})$ est la fibre de l'application (1) au-dessus de $\mathcal{X}$.

On obtient par récurrence une formule analogue pour la variante $SA_{\lambda_1}^{\tilde{G}_1}(V,\mathcal{X})$ de la distribution définie en 1.10 :

$$(3)\qquad I_{\lambda_1}^{\tilde{G}_1}(SA_{\lambda_1}^{\tilde{G}_1}(V,\mathcal{X}),f\otimes dg)=mes(\mathfrak{A}_{C_1}C_1(F)\backslash C_1(\mathbb{A}_F))^{-1}\int_{C_1(F)\backslash C_1(\mathbb{A}_F)}$$

$$\sum_{\mathcal{X}_1\in Fib(\mathcal{X})} I^{\tilde{G}_1}(SA^{\tilde{G}_1}(V,\mathcal{X}_1,c^V\tilde{K}_1^V),\phi^{c_V}\otimes dg_1)\lambda_1(c)\,dc.$$

Considérons le cas particulier où $\tilde{G}=G$, $\tilde{G}_1=G_1$, $\tilde{K}_v=K_v$ et $\tilde{K}_{1,v}=K_{1,v}$ pour tout $v\not\in V$ et où $\mathcal{X}$ correspond à la classe de conjugaison stable de l'élément neutre. Comme toujours, on remplace dans la notation la lettre $\mathcal{X}$ par un indice *unip* : $A_{unip}^{\tilde{G}}(V)$ au lieu de $A^{\tilde{G}}(V,\mathcal{X})$ etc... La fibre $Fib(\mathcal{X})$ est alors l'ensemble $\{\xi\mathcal{X}_1;\xi\in C_1(F)\}$, où $\mathcal{X}_1$ correspond à la classe de conjugaison stable de l'unité dans $G_1(F)$. D'après [VI] 2.4(7), on a l'égalité :

$$I^{\tilde{G}_1}(A^{\tilde{G}_1}(V,\xi\mathcal{X}_1,\xi^Vc^VK_1^V),\phi^{\xi_Vc_V}\otimes dg_1)=I^{\tilde{G}_1}(A^{\tilde{G}_1}(V,\mathcal{X}_1,c^VK_1^V),\phi^{c_V}\otimes dg_1).$$

Puisque de plus

$$I^{\tilde{G}_1}(A^{\tilde{G}_1}(V,\mathcal{X}_1,c^VK_1^V),\phi^{c_V}\otimes dg_1)=\begin{cases} I^{\tilde{G}_1}(A^{\tilde{G}_1}(V,\mathcal{X}_1,K_1^V),\phi^{c_V}\otimes dg_1), & \text{si } c^V\in K_{C_1}^V,\\ 0, & \text{sinon,}\end{cases}$$

la formule (2) se simplifie en

$$(4)\qquad I_{\lambda_1}^{\tilde{G}_1}(A_{unip,\lambda_1}^{\tilde{G}_1}(V),f\otimes dg)=mes(\mathfrak{A}_{C_1}C_1(F)\backslash C_1(\mathbb{A}_F))^{-1}$$

$$\int_{C_1(F_V)} I^{\tilde{G}_1}(A_{unip}^{\tilde{G}_1}(V),\phi^{c_V}\otimes dg_1)\lambda_1(c)\,dc.$$

La formule (5) se simplifie de même en

$$(5)\qquad I_{\lambda_1}^{\tilde{G}}(SA_{unip,\lambda_1}^{\tilde{G}_1}(V),f\otimes dg)=mes(\mathfrak{A}_{C_1}C_1(F)\backslash C_1(\mathbb{A}_F))^{-1}$$

$$\int_{C_1(F_V)} I^{\tilde{G}_1}(SA_{unip}^{\tilde{G}_1}(V),\phi^{c_V}\otimes dg_1)\lambda_1(c)\,dc.$$

Autrement dit, la distribution $A_{unip,\lambda_1}^{\tilde{G}_1}(V)dg$, qui appartient à $D_{unip,\lambda_1}(\tilde{G}'_1(F_V))$ est l'image de l'élément $mes(\mathfrak{A}_{C_1}C_1(F)\backslash C_1(\mathbb{A}_F))^{-1}A_{unip}^{\tilde{G}_1}(V)dg_1$ de $D_{unip}(\tilde{G}'_1(F_V))$ par l'application définie en [II] 1.10(3). De même, $SA_{unip,\lambda_1}^{\tilde{G}_1}(V)dg$ est l'image de

$$mes(\mathfrak{A}_{C_1}C_1(F)\backslash C_1(\mathbb{A}_F))^{-1}SA_{unip}^{\tilde{G}_1}(V)dg_1.$$

1.12 Relation avec les distributions associées aux classes de conjugaison stable locales

Soit V un ensemble fini de places de F contenant V_{ram}. Soit $\mathcal{O}_V \in \tilde{G}_{ss}(F_V)/st-conj$. Posons $\mathcal{X}_V = \chi^{\tilde{G}_V}(\mathcal{O}_V)$. Pour $\mathcal{X} \in \mathbf{Stab}(\tilde{G}(F))$, on note simplement $\mathcal{X} \mapsto \mathcal{X}_V$ la relation : $\mathcal{X}_V$ est l'image de $\mathcal{X}$ par localisation. Les distributions des membres de gauche des égalités de l'énoncé ci-dessous ont été définies en [VI] 2.3, 5.2 et 5.4.

Proposition. *(i) On a l'égalité*

$$A^{\tilde{G}}(V,\mathcal{O}_V,\omega) = \sum_{\mathcal{X}\in\mathbf{Stab}(\tilde{G}(F)),\mathcal{X}\mapsto\mathcal{X}_V} A^{\tilde{G}}(V,\mathcal{X},\omega).$$

(ii) On a l'égalité

$$A^{\tilde{G},\mathcal{E}}(V,\mathcal{O}_V,\omega) = \sum_{\mathcal{X}\in\mathbf{Stab}(\tilde{G}(F)),\mathcal{X}\mapsto\mathcal{X}_V} A^{\tilde{G},\mathcal{E}}(V,\mathcal{X},\omega).$$

(iii) Supposons $(G,\tilde{G},\mathbf{a})$ quasi-déployé et à torsion intérieure. Alors on a l'égalité

$$SA^{\tilde{G}}(V,\mathcal{O}_V) = \sum_{\mathcal{X}\in\mathbf{Stab}(\tilde{G}(F)),\mathcal{X}\mapsto\mathcal{X}_V} SA^{\tilde{G}}(V,\mathcal{X}).$$

Preuve. Les deux côtés de l'égalité (i) sont des sommes de $A^{\tilde{G}}(V,\mathcal{C},\omega)$, où $\mathcal{C} \in \tilde{G}_{ss}(F)/conj$. Du côté gauche, on somme sur les $\mathcal{C}$ dont la classe localisée $\mathcal{C}_V$ est contenue dans $\mathcal{O}_V$. Du côté droit, on somme sur les $\mathcal{C}$ contenus dans une classe de conjugaison stable $\mathcal{O}$ dont le paramètre $\mathcal{X}$ s'envoie par localisation sur $\mathcal{X}_V$. La commutativité du diagramme de 1.4 entraîne que ces ensembles de sommation sont les mêmes. D'où (i).

Si $(G,\tilde{G},\mathbf{a})$ est quasi-déployé et à torsion intérieure, les termes intervenant dans (ii) sont identiques par définition aux mêmes termes où l'on supprime l'exposant $\mathcal{E}$. L'assertion (ii) n'est alors autre que (i). Supposons maintenant que $(G,\tilde{G},\mathbf{a})$ n'est pas quasi-déployé et à torsion intérieure. Par définition

$$A^{\tilde{G},\mathcal{E}}(V,\mathcal{O}_V,\omega) = \sum_{\mathbf{G}'\in\mathcal{E}(\tilde{G},\mathbf{a},V)} i(\tilde{G},\tilde{G}')transfert(SA^{\mathbf{G}'}(V,\mathcal{O}_{V,\tilde{G}'})).$$

Fixons $\mathbf{G}'$. Rappelons que $\mathcal{O}_{V,\tilde{G}'}$ est la réunion des $\mathcal{O}'_V \in \tilde{G}'_{ss}(F_V)/st-conj$ qui correspondent à $\mathcal{O}_V$. Le lemme 1.8 nous dit que cet ensemble de classes est égal à celui des classes $\mathcal{O}'_V$ qui vérifient les deux conditions suivantes :

- elles correspondent à une classe dans $\tilde{G}_{ss}(F_V)/st-conj$;

- leur paramètre $\mathcal{X}'_V$ s'envoie sur $\mathcal{X}_V$ par la version locale de l'application 1.7(1) (ce que l'on note $\mathcal{X}'_V \mapsto \mathcal{X}$).

On se rappelle que $SA^{\mathbf{G}'}(V,\mathcal{O}'_V)$ est à support dans l'ensemble des éléments dont la partie semi-simple appartient à $\mathcal{O}'_V$, cf. [VI] 5.2. Si $\mathcal{O}'_V$ ne correspond à aucune classe dans $\tilde{G}_{ss}(F_V)$, le transfert de $SA^{\mathbf{G}'}(V,\mathcal{O}'_V)$ est donc nul. On peut donc aussi bien supprimer la première condition ci-dessus :

$$transfert(SA^{\mathbf{G}'}(V,\mathcal{O}_{V,\tilde{G}'})) = \sum_{\mathcal{X}'_V\mapsto\mathcal{X}_V} transfert(SA^{\mathbf{G}'}(V,\mathcal{O}'_V)),$$

où $\mathcal{O}'_V$ est l'unique élément paramétré par $\mathcal{X}'_V$. Modulo les formalités habituelles, on peut appliquer (iii) aux termes du membre de droite. On obtient

$$transfert(SA^{\mathbf{G}'}(V,\mathcal{O}_{V,\tilde{G}'})) = \sum_{\mathcal{X}'_V\mapsto\mathcal{X}_V} transfert\left(\sum_{\mathcal{X}'\in\mathbf{Stab}(\tilde{G}'(F)),\mathcal{X}'\mapsto\mathcal{X}'_V} SA^{\mathbf{G}'}(V,\mathcal{X}')\right).$$

La localisation commute à l'application 1.7(1). Sommer en $\mathcal{X}'_V\mapsto\mathcal{X}_V$ puis $\mathcal{X}'\mapsto\mathcal{X}'_V$ revient à sommer sur les $\mathcal{X}\in\mathbf{Stab}(\tilde{G}(F))$ tels que $\mathcal{X}\mapsto\mathcal{X}_V$ puis sur les $\mathcal{X}'$ tels que $\mathcal{X}'\mapsto\mathcal{X}$. Donc

$$transfert(SA^{\mathbf{G}'}(V,\mathcal{O}_{V,\tilde{G}'})) = \sum_{\mathcal{X}\in\mathbf{Stab}(\tilde{G}(F)),\mathcal{X}\mapsto\mathcal{X}_V}\ \sum_{\mathcal{X}'\in\mathbf{Stab}(\tilde{G}'(F)),\mathcal{X}'\mapsto\mathcal{X}} transfert(SA^{\mathbf{G}'}(V,\mathcal{X}')).$$

Puis

$$A^{\tilde{G},\mathcal{E}}(V,\mathcal{O}_V,\omega) = \sum_{\mathcal{X}\in\mathbf{Stab}(\tilde{G}(F)),\mathcal{X}\mapsto\mathcal{X}_V}\ \sum_{\mathbf{G}'\in\mathcal{E}(\tilde{G},\mathbf{a},V)} i(\tilde{G},\tilde{G}')$$
$$\sum_{\mathcal{X}'\in\mathbf{Stab}(\tilde{G}'(F)),\mathcal{X}'\mapsto\mathcal{X}} transfert(SA^{\mathbf{G}'}(V,\mathcal{X}')).$$

La double somme intérieure est par définition égale à $A^{\tilde{G},\mathcal{E}}(V,\mathcal{X},\omega)$. On obtient (ii).

La preuve de (iii) est analogue. Par définition, on a cette fois

$$SA^{\tilde{G}}(V,\mathcal{O}_V) = A^{\tilde{G}}(V,\mathcal{O}_V) - \sum_{\mathbf{G}'\in\mathcal{E}(\tilde{G},V),G'\neq G} i(\tilde{G},\tilde{G}')transfert(SA^{\mathbf{G}'}(V,\mathcal{O}_{V,\tilde{G}'})).$$

On connaît (i) pour le premier terme de droite et (iii) par récurrence pour les autres termes. Par le même calcul, on en déduit (iii) pour le terme de gauche. □

2 Formules de scindage

2.1 Complément sur le lemme fondamental pondéré

Par exception, dans ce paragraphe, F est un corps local non-archimédien de caractéristique nulle. On note p sa caractéristique résiduelle. On considère un triplet $(G,\tilde{G},\mathbf{a})$ défini sur F qui est "non ramifié". Précisément, comme en [VI] 1.1, on suppose que G et $\mathbf{a}$ sont non ramifiés, que $\tilde{G}(F)$ possède un sous-espace hyperspécial et que, en posant $e=[F:\mathbb{Q}_p]$, on a $p>5$ et $p>N(G)e+1$, où $N(G)$ est défini en [W1] 4.3. On fixe un espace hyperspécial $\tilde{K}$, de groupe associé K. Soit $\tilde{M}$ un espace de Levi de $\tilde{G}$ tel que le Levi M associé soit en bonne position relativement à K. On munit $G(F)$ de la mesure canonique pour laquelle K est de masse totale 1. On a défini en [II] 4.1 une forme linéaire $r_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(.,\tilde{K})$ sur $D_{g\acute{e}om}(\tilde{M}(F),\omega)$: on a

$$r_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma},\tilde{K}) = J_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma},\mathbf{1}_{\tilde{K}}),$$

où $\mathbf{1}_{\tilde{K}}$ est la fonction caractéristique de $\tilde{K}$. Dans le cas où $(G,\tilde{G},\mathbf{a})$ est quasi-déployé et à torsion intérieure, on a défini en 4.2 un avatar stable de cette forme linéaire. Ici, il n'est plus besoin de supposer que $\tilde{M}$ est en bonne position relativement à $\tilde{K}$. L'avatar stable est une forme linéaire $s_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(.,\tilde{K})$ sur $D_{géom}^{st}(\tilde{M}(F))$. Elle vérifie

(1) $s_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(.,\tilde{K})$ ne dépend que de la classe de conjugaison de $\tilde{K}$ par $G_{AD}(F)$.

Pour $\boldsymbol{\delta} \in D_{géom}^{st}(\tilde{M}(F))$, on a la formule familière

$$s_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\delta},\tilde{K}) = r_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\delta},\tilde{K}) - \sum_{s\in Z(\hat{M})^{\Gamma_F}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F}, s\neq 1} i_{\tilde{M}}(\tilde{G},\tilde{G}'(s)) s_{\mathbf{M}}^{\mathbf{G}'(s)}(\boldsymbol{\delta},\tilde{K}).$$

Expliquons la signification du dernier terme. Comme on l'a dit en [II] 4.2, pour s intervenant dans cette somme, le choix d'un sous-espace hyperspécial $\tilde{K}'(s)$ de $\tilde{G}'(s;F)$ permet de définir par récurrence un terme $s_{\mathbf{M}}^{\mathbf{G}'(s)}(\boldsymbol{\delta},\tilde{K}'(s))$. Mais l'espace $\tilde{K}$ détermine un sous-espace $\tilde{K}'(s)$ de $\tilde{G}'(s;F)$ bien défini à conjugaison près par $G'(s)_{AD}(F)$. La propriété (1) permet de noter $s_{\mathbf{M}}^{\mathbf{G}'(s)}(\boldsymbol{\delta},\tilde{K})$ le terme $s_{\mathbf{M}}^{\mathbf{G}'(s)}(\boldsymbol{\delta},\tilde{K}'(s))$ pour un tel $\tilde{K}'(s)$.

Revenons à un triplet $(G,\tilde{G},\mathbf{a})$ quelconque. Soit $\mathbf{M}' = (M',\mathcal{M}',\tilde{\zeta})$ une donnée endoscopique de $(M,\tilde{M},\mathbf{a}_M)$. Si $\mathbf{M}'$ est elliptique et non ramifiée (donc relevante d'après le lemme [I] 6.2), on a défini en [II] 4.3 une forme linéaire $r_{\tilde{M}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{M}',.,\tilde{K})$ sur $D_{géom}^{st}(\mathbf{M}')$ par l'égalité

$$r_{\tilde{M}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{M}',\boldsymbol{\delta},\tilde{K}) = \sum_{\tilde{s}\in\tilde{\zeta}Z(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}} i_{\tilde{M}'}(\tilde{G},\tilde{G}'(\tilde{s})) s_{\mathbf{M}'}^{\mathbf{G}'(\tilde{s})}(\boldsymbol{\delta},\tilde{K}).$$

Il convient de généraliser la définition au cas où $\mathbf{M}'$ est non ramifiée mais pas elliptique. Dans ce cas, il existe un espace de Levi $\tilde{R}$ de $\tilde{M}$ tel que $\mathbf{M}'$ apparaisse comme une donnée endoscopique elliptique et non ramifiée de $(R,\tilde{R},\mathbf{a}_R)$. On peut supposer R en bonne position relativement à K. Comme en [VI] 4.5, on pose alors

$$(2) \qquad r_{\tilde{M}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{M}',\boldsymbol{\delta},\tilde{K}) = \sum_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{R})} d_{\tilde{R}}^{\tilde{G}}(\tilde{M},\tilde{L}) r_{\tilde{R}}^{\tilde{L},\mathcal{E}}(\mathbf{M}',\boldsymbol{\delta},\tilde{K}^{\tilde{L}}),$$

où $\tilde{K}^{\tilde{L}} = \tilde{K}\cap\tilde{L}(F)$.

Proposition. *Soit* $\mathbf{M}' = (M',\mathcal{M}',\tilde{\zeta})$ *une donnée endoscopique relevante de* $(M,\tilde{M},\mathbf{a}_M)$ *et soit* $\boldsymbol{\delta} \in D_{géom}^{st}(\mathbf{M}')$. *Alors*

(i) si $\mathbf{M}'$ *est non ramifiée, on a l'égalité* $r_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(transfert(\boldsymbol{\delta}),\tilde{K}) = r_{\tilde{M}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{M}',\boldsymbol{\delta},\tilde{K})$ *;*

(ii) si $\mathbf{M}'$ *n'est pas non ramifiée, on a l'égalité* $r_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(transfert(\boldsymbol{\delta}),\tilde{K}) = 0$.

Preuve. Supposons que $\mathbf{M}'$ ne soit pas elliptique. Comme ci-dessus, on introduit $\tilde{R}\subset\tilde{M}$ de sorte que $\mathbf{M}'$ soit une donnée elliptique pour $(R,\tilde{R},\mathbf{a}_R)$. Remarquons que $\mathbf{M}'$ est non ramifiée pour $(M,\tilde{M},\mathbf{a}_M)$ si et seulement si elle l'est pour $(R,\tilde{R},\mathbf{a}_R)$. Notons $\boldsymbol{\gamma}$ le transfert de $\boldsymbol{\delta}$ à $\tilde{R}(F)$. Alors le transfert de $\boldsymbol{\delta}$ à $\tilde{M}(F)$ est l'induite $\boldsymbol{\gamma}^{\tilde{M}}$. On a la formule

$$r_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma}^{\tilde{M}},\tilde{K}) = \sum_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{R})} d_{\tilde{R}}^{\tilde{G}}(\tilde{M},\tilde{L}) r_{\tilde{R}}^{\tilde{L}}(\boldsymbol{\gamma},\tilde{K}^{\tilde{L}}),$$

cf. [II] 4.1(1). Celle-ci et la formule parallèle (2) nous ramène à démontrer les assertions de la proposition quand on remplace le couple $(\tilde{G},\tilde{M})$ par un couple $(\tilde{L},\tilde{R})$. En oubliant cette construction, on est ramené au cas $\mathbf{M}'$ est une donnée endoscopique elliptique de $(M,\tilde{M},\mathbf{a}_M)$. L'assertion (i) est le lemme fondamental pondéré, cf. [II] 4.4.

Il reste à prouver (ii). On suppose donc que $\mathbf{M}'$ n'est pas non ramifiée. On utilise la méthode d'Arthur qui se base sur un lemme de Kottwitz ([K2] proposition 7.5) que l'on généralise à notre cas. Fixons une paire de Borel épinglée $\mathcal{E} = (B, T, (E_\alpha)_{\alpha\in\Delta})$ de G, définie sur F, telle que M soit standard pour $\mathcal{E}$ et que le groupe K soit celui issu de $\mathcal{E}$. On pose $M_\sharp = M/Z(M)^\theta$ et $T_\sharp^M = T/Z(M)^\theta$. On rappelle (cf. [I] 2.7) que le groupe $M_\sharp(F)$ opère par conjugaison sur $\tilde{M}(F)$. Si on fixe des données auxiliaires M'_1,...,Δ_1 pour $\mathbf{M}'$, le facteur de transfert $\Delta_1(\delta_1, \gamma)$ se transforme, quand on conjugue γ par un élément de $M_\sharp(F)$, par un caractère $\omega_\sharp$ de $M_\sharp(F)$ qui prolonge le caractère ω de $M(F)$. Notons $\mathfrak{o}$ l'anneau des entiers de F. Montrons que

(3) le groupe d'inertie I_F est inclus dans $\mathcal{M}'$ si et seulement si $\omega_\sharp$ est trivial sur $T_\sharp^M(\mathfrak{o})$, ce qui est encore équivalent à ce que le cocycle définissant $\omega_\sharp$ soit trivial sur I_F.

On a une action galoisienne sur $\hat{M}'$. Pour $w \in I_F$, fixons $m_w = (m(w), w) \in \mathcal{M}'$ qui agisse sur $\hat{M}'$ comme w. Le groupe I_F est contenu dans $\mathcal{M}'$ exactement quand $m(w) \in \hat{M}'$ pour tout $w \in I_F$, c'est-à-dire quand $m(w)$ est dans la composante neutre du centralisateur de $\tilde{\zeta}$ dans $\hat{M}$.

La deuxième condition de (3) est équivalente à ce que la restriction de $\omega_\sharp$ à $T_\sharp^M(F)$ soit non ramifiée c'est-à-dire que tout cocycle définissant ce caractère soit trivial sur I_F. Un tel cocycle est à valeurs dans $Z(\hat{M}_\sharp)$. Rappelons la construction de la restriction à I_F d'un tel cocycle. On suppose $\tilde{\zeta} = \zeta\hat{\theta}$ avec $\zeta \in \hat{T}$, avec les notations habituelles. Soient $w \in I_F$ et $m_w = (m(w), w)$ comme ci-dessus. Comme pour tout élément de $\mathcal{M}'$, on a la propriété de commutation suivante vis-à-vis de $\tilde{\zeta}$:

$$\zeta\hat{\theta}(m(w))\zeta^{-1} = m(w)$$

puisque $\mathbf{G}$ et $\mathbf{a}$ sont non ramifiés. Le cocycle associé à $\omega_\sharp$ est défini en relevant les éléments intervenant ci-dessus dans le groupe dual de $M_\sharp$ et en fait, parce que le groupe $\hat{M}_\sharp$ est plus difficile à analyser, on relève même dans un revêtement simplement connexe du groupe dérivé de $\hat{M}$ noté $\hat{M}_{SC}$. On fixe un élément $z(w) \in Z(\hat{M})$ tel que $m(w)z(w)$ soit l'image d'un élément $m_{sc}(w) \in \hat{M}_{SC}$. Quitte à changer la donnée endoscopique en une donnée équivalente, on peut aussi relever ζ en un élément ζ_{sc}. Et on a une relation

$$(4) \qquad \zeta_{sc}\hat{\theta}(m_{sc}(w))\zeta_{sc}^{-1} = a_{sc}(w)m_{sc}(w),$$

avec un élément $a_{sc}(w) \in \hat{M}_{SC}$ dont on vérifie aisément qu'il est dans le centre de ce groupe. On note $a_\sharp(w)$ l'image de $a_{sc}(w)$ dans $\hat{M}_\sharp$ (par projection naturelle) et on pose $z_\sharp(w) = a_\sharp(w)z(w)\hat{\theta}(z(w))^{-1}$. Par définition (cf. [I] 2.7), $z_\sharp$ est la restriction à I_F d'un cocycle définissant $\omega_\sharp$. En [I] 2.7 (suite exacte suivant la suite (2)), il est montré que $z_\sharp(w)$ est l'élément neutre de $Z(\hat{M}_\sharp)$ si et seulement s'il existe $b(w) \in Z(\hat{M}_{SC})$ tel que $z(w) \in b(w)\hat{T}^{\hat{\theta},0}$ et $a_{sc}(w) = \hat{\theta}(b(w))b(w)^{-1}$.

Supposons que $z_\sharp(w) = 1$. On fixe les choix précédents d'où en particulier $b(w) \in Z(\hat{M}_{SC})$. On modifie $z(w)$ en le remplaçant par $z(w)b(w)^{-1}$; ainsi $z(w) \in \hat{T}^{\hat{\theta},0}$ et $a_{sc}(w) = 1$. Ainsi, avec (4), $m_{sc}(w)$ est dans le commutant de $\zeta_{sc}\hat{\theta}$ qui est un groupe connexe et son image $m(w)z(w)$ est dans la composante connexe du commutant de $\tilde{\zeta}$ dans $\hat{M}$, c'est-à-dire $\hat{M}'$. Mais $\hat{M}'$ contient $\hat{T}^{\hat{\theta},0}$ donc $m(w)$ lui-même est dans $\hat{M}'$. Puisque $(m(w), w) \in \mathcal{M}'$, on a $(1, w) \in \mathcal{M}'$ et $\mathcal{M}'$ contient I_F.

Réciproquement, supposons que $(1, w) \in \mathcal{M}'$ pour tout $w \in I_F$. Alors on peut prendre ci-dessus $m(w) = 1$. Il est alors clair que $z_\sharp(w) = 1$ en reprenant la construction rappelée ci-dessus de cet élément. Cela démontre (3).

On termine la preuve du (ii) de la proposition. Le groupe $T_\sharp^M(\mathfrak{o})$ agit par conjugaison sur $C_c^\infty(\tilde{M}(F))$. Il s'en déduit une action sur $I(\tilde{M}(F),\omega)$ et, par dualité, sur $D_{géom}(\tilde{M}(F),\omega)$. La propriété de transformation des facteurs de transfert rappelée ci-dessus entraîne que, pour $f\in C_c^\infty(\tilde{M}(F))$, les transferts à $\mathbf{M}'$ de f et de $\omega_\sharp(x)ad_x(f)$ sont égaux. Par dualité, il en résulte que $\omega_\sharp(x)ad_x(transfert(\boldsymbol{\delta}))=transfert(\boldsymbol{\delta})$. On va faire agir x par conjugaison mais pour que x agisse sur $\tilde{G}(F)$, il faut commencer par relever x en un élément de $G_\sharp(F)$, où $G_\sharp=G/Z(G)^\theta$. Pour faire cela, posons $T_\sharp=T/Z(G)^\theta$. On commence par démontrer que l'application $T_\sharp(\mathfrak{o})\to T_\sharp^M(\mathfrak{o})$ est surjective : le conoyau s'injecte dans $H^1(Gal(F^{nr}/F);(Z(M)^\theta/Z(G)^\theta)(\mathfrak{o}^{nr}))$, où F^{nr} est l'extension non ramifiée maximale de F et $\mathfrak{o}^{nr}$ est son anneau d'entiers. Or $Z(M)^\theta/Z(G)^\theta$ est un tore (donc connexe) et ce groupe de cohomologie est nul par le théorème de Lang. On relève donc x en un élément de $T_\sharp(\mathfrak{o}_v)$. Par simple transport de structure, on a l'égalité

$$r_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(transfert(\boldsymbol{\delta}),\tilde{K})=r_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(ad_x(transfert(\boldsymbol{\delta})),ad_x(\tilde{K})).$$

Puisque $transfert(\boldsymbol{\delta})$ se transforme par un caractère non trivial de $T_\sharp^M(\mathfrak{o})$, il ne reste plus qu'à démontrer que $\tilde{K}=ad_x(\tilde{K})$. Certainement, ad_x conserve K puisque K est associé à $\mathcal{E}$. Il suffit donc de prouver qu'il existe $\gamma\in\tilde{K}$ tel que $ad_x(\gamma)\in\tilde{K}$. On a rappelé en 1.5 que l'on pouvait choisir $t\in T(\mathfrak{o}^{nr})$ et $e\in Z(\tilde{G},\mathcal{E};F^{nr})$ de sorte que $\gamma=te$ appartienne à $\tilde{K}$. On relève x en un élément $y\in T(\mathfrak{o}^{nr})$ et on écrit

$$x\gamma x^{-1}=yt\,ad_e(y^{-1})e.$$

Les éléments yt et $ad_e(y^{-1})$ sont dans $T(\mathfrak{o}^{nr})$. Ainsi $yt\,ad_e(y^{-1})\in T(\mathfrak{o}^{nr})$ et aussi $u=yt\,ad_e(y^{-1})t^{-1}$. Ainsi

$$x\gamma x^{-1}\in ute=u\gamma,$$

avec $u\in T(\mathfrak{o}^{nr})$. Mais $x\gamma x^{-1}$ et γ sont dans $\tilde{G}(F)$ donc $u\in T(\mathfrak{o}^{nr})\cap G(F)=T(\mathfrak{o})\subset K$. Ainsi $x\gamma x^{-1}\in\tilde{K}$, ce qui est l'assertion cherchée. $\square$

2.2 Version globale du lemme fondamental pondéré

Le corps de base est de nouveau notre corps de nombres. On considère un triplet $(G,\tilde{G},\mathbf{a})$ défini sur F. Soit U un ensemble fini de places tel que, contrairement à l'habitude, $U\cap V_{ram}=\emptyset$ et soit $\tilde{M}\in\mathcal{L}(\tilde{M}_0)$. On a défini en [VI] 1.13 une forme linéaire $r_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(.,\tilde{K}_U)$ sur $D_{géom}(\tilde{M}(F_U),\omega)$ par

$$r_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma},\tilde{K}_U)=J_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma},\mathbf{1}_{\tilde{K}_U}).$$

Supposons $(G,\tilde{G},\mathbf{a})$ quasi-déployé et à torsion intérieure. Nous allons définir une forme linéaire $\boldsymbol{\delta}\mapsto s_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\delta},\tilde{K}_U)$ sur $D_{géom}^{st}(\tilde{M}(F_U))$. Elle doit vérifier les propriétés formelles habituelles. Elle doit aussi posséder une propriété d'invariance relativement à l'action de $G_{AD}(F_U)$ en le sens suivant. On oublie pour un temps que l'on a fixé en 1.1 les espaces hyperspéciaux $\tilde{K}_v$. Soient $\tilde{K}_U$ et $\tilde{K}'_U$ deux sous-espaces hyperspéciaux de $\tilde{G}(F_U)$ dont les groupes sous-jacents K_U et K'_U sont en bonne position relativement à M_0. Supposons que $\tilde{K}_U$ et $\tilde{K}'_U$ soient conjugués par un élément de $G_{AD}(F_U)$. On doit alors avoir l'égalité

(1) $s_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\delta},\tilde{K}'_U)=s_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\delta},\tilde{K}_U)$

pour tout $\boldsymbol{\delta}$. Comme en [II] 4.2, cette condition permet de généraliser la définition au cas où le groupe K_U n'est pas supposé en bonne position relativement à M_0.

Soit $s \in Z(\hat{M})^{\Gamma_F}$, introduisons la donnée endoscopique $\mathbf{G}' = \mathbf{G}'(s)$ de $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$. Introduisons des données auxiliaires $G'_1, \tilde{G}'_1, C_1, \hat{\xi}_1, \tilde{K}'_{1,U}$ non ramifiées dans U. Par une extension formelle des définitions, on définit $s^{\tilde{G}'_1}_{\tilde{M}'_1,\lambda_1}(\boldsymbol{\delta}_1, \tilde{K}'_{1,U})$ pour $\boldsymbol{\delta}_1 \in D^{st}_{géom,\lambda_1}(\tilde{M}'_1(F_U))$. Si on remplace les données auxiliaires par d'autres données $G'_2, ..., \tilde{K}'_{2,U}$, ces termes se recollent pourvu que la fonction de recollement $\tilde{\lambda}_{12,U}$ vérifie l'égalité $\tilde{\lambda}_{12,U}(\gamma_1, \gamma_2) = 1$ pour $\gamma_1 \in \tilde{K}_{1,U}$ et $\gamma_2 \in \tilde{K}_{2,U}$. Mais l'espace $D^{st}_{géom}(\mathbf{M}_U)$ a été défini en considérant des données auxiliaires $G'_1, \tilde{G}'_1, C_1, \hat{\xi}_1, \Delta_{1,U}$ et des fonctions de recollement identifiant les facteurs de transfert. L'identification entre les deux types de données auxiliaires se fait bien sûr en utilisant les facteurs de transfert "non ramifiés" : on déduit des données $G'_1, \tilde{G}'_1, C_1, \hat{\xi}_1, \tilde{K}'_{1,U}$ les données $G'_1, \tilde{G}'_1, C_1, \hat{\xi}_1, \Delta_{1,U}$, où $\Delta_{1,U}$ est le facteur de transfert déterminé par le couple $(\tilde{K}_U, \tilde{K}'_{1,U})$. Les deux notions de recollement coïncident alors. Les formes linéaires précédemment définies se recollent en une forme linéaire sur $D^{st}_{géom}(\mathbf{M}_U)$. La propriété (1) montre qu'elle ne dépend que de la classe de conjugaison par $G'_{AD}(F_U)$ de l'espace hyperspécial $\tilde{K}'_U$ de $\tilde{G}'(F_U)$, laquelle ne dépend que de $\tilde{K}_U$ lui-même. Cela justifie de noter cette forme linéaire

$$\boldsymbol{\delta} \mapsto s^{\mathbf{G}'}_{\mathbf{M}}(\boldsymbol{\delta}, \tilde{K}_U).$$

On peut alors poser la définition, pour $\boldsymbol{\delta} \in D^{st}_{géom}(\tilde{M}(F_U))$:

$$s^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\boldsymbol{\delta}, \tilde{K}_U) = r^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\boldsymbol{\delta}, \tilde{K}_U) - \sum_{s \in Z(\hat{M})^{\Gamma_F}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F}, s \neq 1} i_{\tilde{M}}(\tilde{G}, \tilde{G}'(s)) s^{\mathbf{G}'(s)}_{\mathbf{M}}(\boldsymbol{\delta}, \tilde{K}_U).$$

Une preuve similaire à celle de la proposition [VI] 4.2 montre que, pour $\boldsymbol{\delta} = \otimes_{v \in U} \boldsymbol{\delta}_v$, on a l'égalité

$$s^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\boldsymbol{\delta}, \tilde{K}_U) = \sum_{\tilde{L}^U \in \mathcal{L}(\tilde{M}_U)} e^{\tilde{G}}_{\tilde{M}_U}(\tilde{M}, \tilde{L}^U) \prod_{v \in U} s^{\tilde{L}^v}_{\tilde{M}_v}(\boldsymbol{\delta}_v, \tilde{K}^{\tilde{L}^v}_v),$$

où les derniers termes sont les formes linéaires locales définies en [II] 4.2. Grâce à cette égalité, les propriétés formelles requises ainsi que la propriété (1) résultent des mêmes propriétés de ces formes linéaires locales prouvées en [II] 4.2.

Revenons au cas où $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$ est quelconque. Soit $\mathbf{M}' = (M', \mathcal{M}', \tilde{\zeta})$ une donnée endoscopique de $(M, \tilde{M}, \mathbf{a}_M)$ non ramifiée dans U. De nouveau, pour $\tilde{s} \in \tilde{\zeta} Z(\hat{M})^{\Gamma_F, \hat{\theta}}$, on définit une forme linéaire $\boldsymbol{\delta} \mapsto s^{\mathbf{G}'(\tilde{s})}_{\mathbf{M}'}(\boldsymbol{\delta}, \tilde{K}_U)$ sur $D^{st}_{géom}(\mathbf{M}'_U)$. Pour un tel $\boldsymbol{\delta}$, on pose

$$r^{\tilde{G}, \mathcal{E}}_{\tilde{M}}(\mathbf{M}', \boldsymbol{\delta}, \tilde{K}_U) = \sum_{\tilde{s} \in \tilde{\zeta} Z(\hat{M})^{\Gamma_F, \hat{\theta}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F, \hat{\theta}}} i_{\tilde{M}'}(\tilde{G}, \tilde{G}'(\tilde{s})) s^{\mathbf{G}'(\tilde{s})}_{\mathbf{M}'}(\boldsymbol{\delta}, \tilde{K}_U).$$

Une preuve similaire à celle de la proposition [VI] 4.5 montre que, pour $\boldsymbol{\delta} = \otimes_{v \in U} \boldsymbol{\delta}_v$, on a l'égalité

$$r^{\tilde{G}, \mathcal{E}}_{\tilde{M}}(\mathbf{M}', \boldsymbol{\delta}, \tilde{K}_U) = \sum_{\tilde{L}^U \in \mathcal{L}(\tilde{M}_U)} d^{\tilde{G}}_{\tilde{M}_U}(\tilde{M}, \tilde{L}^U) \prod_{v \in U} r^{\tilde{L}^v, \mathcal{E}}_{\tilde{M}_v}(\mathbf{M}', \boldsymbol{\delta}_v, \tilde{K}^{\tilde{L}^v}_v),$$

où les derniers termes sont les formes linéaires locales définies en 2.1. Grâce à cette égalité et à l'égalité parallèle concernant les termes $r^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\boldsymbol{\gamma}, \tilde{K}_U)$ (cf. [VI] 1.13) , la proposition suivante résulte de celle du paragraphe précédent.

Proposition. *Soit* $\mathbf{M}'$ *une donnée endoscopique elliptique et relevante de* $(M, \tilde{M}, \mathbf{a}_M)$ *et soit* $\boldsymbol{\delta} \in D^{st}_{géom}(\mathbf{M}'_V)$. *Alors*

(i) si $\mathbf{M}'$ *est non ramifiée dans* U, *on a l'égalité*

$$r^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(transfert(\boldsymbol{\delta}), \tilde{K}_U) = r^{\tilde{G},\mathcal{E}}_{\tilde{M}}(\mathbf{M}', \boldsymbol{\delta}, \tilde{K}_U);$$

(ii) si $\mathbf{M}'$ *n'est pas non ramifiée dans* U, *on a l'égalité*

$$r^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(transfert(\boldsymbol{\delta}), \tilde{K}_U) = 0.$$

2.3 Enoncé des formules de scindage

On considère un triplet quelconque $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$ et deux ensembles finis V et S de places de F tels que $V_{ram} \subset V \subset S$.

Soit $\tilde{M} \in \mathcal{L}(\tilde{M}_0)$. Choisissons une paire de Borel épinglée $\mathcal{E} = (B, T, (E_\alpha)_{\alpha \in \Delta})$ de G telle que M soit standard. Alors M détermine un sous-ensemble $\Delta^M \subset \Delta$ et $(B, T, (E_\alpha)_{a \in \Delta^M})$ est une paire de Borel épinglée de M. En identifiant ces paires <u>aux</u> paires de Borel épinglées de G et M, on a une inclusion naturelle $Stab(\tilde{M}(F)) \subset Stab(\tilde{G}(F))$, qui dépend du choix de $\mathcal{E}$. Il s'en déduit une application $\mathbf{Stab}(\tilde{M}(F)) \to \mathbf{Stab}(\tilde{G}(F))$. Celle-ci ne dépend plus du choix de $\mathcal{E}$. On la note simplement $\mathcal{X}_M \mapsto \mathcal{X}$. Pour $\mathcal{X}_M \in \mathbf{Stab}(\tilde{M}(F))$, on a défini en 1.9 une distribution $A^{\tilde{M}}(S, \mathcal{X}_M, \omega) \in D_{géom}(\tilde{M}(F_S), \omega) \otimes Mes(M(F_S))^*$. Cet espace est le produit tensoriel de $D_{géom}(\tilde{M}(F_S^V), \omega) \otimes Mes(M(F_S^V))^*$ et de $D_{géom}(\tilde{M}(F_V), \omega) \otimes Mes(M(F_V))^*$. De plus, le choix des mesures canoniques identifie $Mes(M(F_S^V))^*$ à $\mathbb{C}$. On peut donc écrire

$$(1) \qquad A^{\tilde{M}}(S, \mathcal{X}_M, \omega) = \sum_{i=1,\dots,n(\mathcal{X}_M)} k_i^{\tilde{M}}(\mathcal{X}_M, \omega)_S^V \otimes A_i^{\tilde{M}}(\mathcal{X}_M, \omega)_V$$

avec des $k_i^{\tilde{M}}(\mathcal{X}_M, \omega)_S^V \in D_{géom}(\tilde{M}(F_S^V), \omega)$ et des $A_i^{\tilde{M}}(\mathcal{X}_M, \omega)_V \in D_{géom}(\tilde{M}(F_V), \omega) \otimes Mes(M(F_V))^*$. On note $A_i^{\tilde{G}}(\mathcal{X}_M, \omega)_V \in D_{géom}(\tilde{G}(F_V), \omega) \otimes Mes(G(F_V))^*$ l'induite de $A_i^{\tilde{M}}(\mathcal{X}_M, \omega)_V$. On a rappelé dans le paragraphe précédent la forme linéaire $r^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(., \tilde{K}_{S-V})$ et on en a défini divers avatars. Nous modifions légèrement leur notation en remplaçant $\tilde{K}_{S-V}$ par $\tilde{K}_S^V$.

Soit $\mathcal{X} \in \mathbf{Stab}(\tilde{G}(F))$. Il résulte de la définition de 1.9 et de [VI] 2.3(9) que l'on a l'égalité

$$(2) \qquad A^{\tilde{G}}(V, \mathcal{X}, \omega) = \sum_{\tilde{M} \in \mathcal{L}(\tilde{M}_0)} |W^{\tilde{M}}||W^{\tilde{G}}|^{-1} \sum_{\mathcal{X}_M \in \mathbf{Stab}(\tilde{M}(F)), \mathcal{X}_M \mapsto \mathcal{X}}$$

$$\sum_{i=1,\dots,n(\mathcal{X}_M)} r^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(k_i^{\tilde{M}}(\mathcal{X}_M, \omega)_S^V, \tilde{K}_S^V) A_i^{\tilde{G}}(\mathcal{X}_M, \omega)_V.$$

Supposons $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$ quasi-déployé et à torsion intérieure. Pour $\tilde{M} \in \mathcal{L}(\tilde{M}_0)$ et $\mathcal{X}_M \in \mathbf{Stab}(\tilde{M}(F))$, on a défini la distribution $SA^{\tilde{M}}(S, \mathcal{X}_M)$ en 1.10. Si $\tilde{M} \neq \tilde{G}$, elle est stable d'après le théorème 1.10(ii) et nos hypothèses de récurrence. Si $\tilde{M}=\tilde{G}$, supposons qu'elle est stable. On peut alors la décomposer comme en (1) en

$$(3)\qquad SA^{\tilde{M}}(S,\mathcal{X}_M)=\sum_{i=1,...,n(\mathcal{X}_M)}Sk_i^{\tilde{M}}(\mathcal{X}_M)_S^V\otimes SA_i^{\tilde{M}}(\mathcal{X}_M)_V$$

avec des $Sk_i^{\tilde{M}}(\mathcal{X}_M)_S^V\in D_{g\acute{e}om}^{st}(\tilde{M}(F_S^V))$ et des $SA_i^{\tilde{M}}(\mathcal{X}_M)_V\in D_{g\acute{e}om}^{st}(\tilde{M}(F_V))\otimes Mes(M(F_V))^*$. On note $SA_i^{\tilde{G}}(\mathcal{X}_M)_V\in D_{g\acute{e}om}^{st}(\tilde{G}(F_V))\otimes Mes(G(F_V))^*$ l'induite de $SA_i^{\tilde{M}}(\mathcal{X}_M)_V$.

Revenons au cas où $(G,\tilde{G},\mathbf{a})$ est quelconque. Pour $\mathcal{X}\in\mathbf{Stab}(\tilde{G}(F))$, on a défini une distribution $A^{\tilde{G},\mathcal{E}}(S,\mathcal{X},\omega)$ en 1.10. On peut la décomposer de la même façon qu'en (1) :

$$(4)\qquad A^{\tilde{G},\mathcal{E}}(S,\mathcal{X},\omega)=\sum_{i=1,...,n(\mathcal{X})}k_i^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathcal{X},\omega)_S^V\otimes A_i^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathcal{X},\omega)_V$$

avec des $k_i^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathcal{X}_M,\omega)_S^V\in D_{g\acute{e}om}(\tilde{G}(F_S^V),\omega)$ et des $A_i^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathcal{X},\omega)_V\in D_{g\acute{e}om}(\tilde{G}(F_V),\omega)\otimes Mes(G(F_V))^*$.

Proposition. *Soit $\mathcal{X}\in\mathbf{Stab}(\tilde{G}(F))$.*

(i) On a l'égalité

$$A^{\tilde{G},\mathcal{E}}(V,\mathcal{X},\omega)=\sum_{i=1,...,n(\mathcal{X})}r^{\tilde{G}}(k_i^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathcal{X},\omega)_S^V,\tilde{K}_S^V)A_i^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathcal{X},\omega)_V$$

$$+\sum_{\tilde{M}\in\mathcal{L}(\tilde{M}_0),\tilde{M}\neq\tilde{G}}|W^{\tilde{M}}||W^{\tilde{G}}|^{-1}\sum_{\mathcal{X}_M\in\mathbf{Stab}(\tilde{M}(F)),\mathcal{X}_M\mapsto\mathcal{X}}\sum_{i=1,...,n(\mathcal{X}_M)}r_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(k_i^{\tilde{M}}(\mathcal{X}_M,\omega)_S^V,\tilde{K}_S^V)A_i^{\tilde{G}}(\mathcal{X}_M,\omega)_V.$$

(ii) Supposons que $(G,\tilde{G},\mathbf{a})$ soit quasi-déployé et à torsion intérieure et que $SA^{\tilde{G}}(S,\mathcal{X})$ soit stable. Alors on a l'égalité

$$SA^{\tilde{G}}(V,\mathcal{X})=\sum_{\tilde{M}\in\mathcal{L}(\tilde{M}_0)}|W^{\tilde{M}}||W^{\tilde{G}}|^{-1}\sum_{\mathcal{X}_M\in\mathbf{Stab}(\tilde{M}(F)),\mathcal{X}_M\mapsto\mathcal{X}}$$

$$\sum_{i=1,...,n(\mathcal{X}_M)}s_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(Sk_i^{\tilde{M}}(\mathcal{X}_M)_S^V,\tilde{K}_S^V)SA_i^{\tilde{G}}(\mathcal{X}_M)_V.$$

2.4 Preuve de la proposition 2.3

Prouvons le (i) de cette proposition. Si $(G,\tilde{G},\mathbf{a})$ est quasi-déployé et à torsion intérieure, on a par définition les égalités $A^{\tilde{G},\mathcal{E}}(V,\mathcal{X},\omega)=A^{\tilde{G}}(V,\mathcal{X},\omega)$ et $A^{\tilde{G},\mathcal{E}}(S,\mathcal{X},\omega)=A^{\tilde{G}}(S,\mathcal{X},\omega)$. La formule à prouver n'est autre que 2.3(2). On suppose maintenant que $(G,\tilde{G},\mathbf{a})$ n'est pas quasi-déployé et à torsion intérieure.

Soient $\mathbf{G}'\in\mathcal{E}(\tilde{G},\mathbf{a},S)$ et $\tilde{M}'\in\mathcal{L}(\tilde{M}'_0)$ (où $\tilde{M}'_0$ est le Levi minimal fixé dans $\tilde{G}'$). Soit $\mathcal{X}_{M'}\in\mathbf{Stab}(\tilde{M}'(F))$. Supposons que $\tilde{M}'$ soit relevant. Alors il existe un espace de Levi $\tilde{M}$ de $\tilde{G}$ tel que $\tilde{M}'$ apparaisse comme l'espace associé à une donnée endoscopique elliptique $\mathbf{M}'$ de $(M,\tilde{M},\mathbf{a}_M)$. Comme on l'a dit en 1.10, des formalités permettent de définir des distributions $SA^{\mathbf{M}'}(V,\mathcal{X}_{M'})$ et $SA^{\mathbf{M}'}(S,\mathcal{X}_{M'})$. On peut décomposer cette dernière par une formule similaire à 2.3(3) :

$$(1)\qquad SA^{\mathbf{M}'}(S,\mathcal{X}_{M'})=\sum_{i=1,...,n(\mathcal{X}_{M'})}Sk_i^{\mathbf{M}'}(\mathcal{X}_{M'})_S^V\otimes SA_i^{\mathbf{M}'}(\mathcal{X}_{M'})_V.$$

On note $SA_i^{\mathbf{G}'}(\mathcal{X}_{M'})_V$ l'induite à $\mathbf{G}'$ de $SA_i^{\mathbf{M}'}(\mathcal{X}_{M'})_V$.

Soient $\mathbf{G}'\in\mathcal{E}(\tilde{G},\mathbf{a},V)$ et $\mathcal{X}_{G'}\in\mathbf{Stab}(\tilde{G}(F))$. Montrons que l'on a l'égalité

$$(2)\qquad transfert(SA^{\mathbf{G}'}(V,\mathcal{X}_{G'}))=\sum_{\tilde{M}'\in\mathcal{L}(\tilde{M}'_0),\tilde{M}'\text{ relevant}}|W^{M'}||W^{G'}|^{-1}$$

$$\sum_{\mathcal{X}_{M'}\in\mathbf{Stab}(\tilde{M}'(F)),\mathcal{X}_{M'}\mapsto\mathcal{X}_{G'}}\sum_{i=1,...,n(\mathcal{X}_{M'})}s_{\mathbf{M}'}^{\mathbf{G}'}(Sk_i^{\mathbf{M}'}(\mathcal{X}_{M'})_S^V,\tilde{K}_S^V)\,transfert(SA_i^{\mathbf{G}'}(\mathcal{X}_{M'})_V).$$

Preuve. On fixe des données auxiliaires G'_1 etc... pour $\mathbf{G}'$. Alors $SA^{\mathbf{G}'}(V,\mathcal{X}_{G'})$ s'identifie à une distribution que l'on peut noter $SA_{\lambda_1}^{\tilde{G}'_1}(V,\mathcal{X}_{G'})$. Grâce à nos hypothèses de récurrence et à quelques formalités, on peut lui appliquer le (ii) de la proposition 2.3. On applique ensuite l'application de transfert à la formule obtenue. On obtient une formule similaire à celle ci-dessus. Plus précisément, on obtient une somme sur $\tilde{M}'\in\mathcal{L}(\tilde{M}'_0)$ de certains termes, notons-les $X(\tilde{M}')$. On voit facilement que, si $\tilde{M}'$ est relevant, $X(\tilde{M}')$ est égal au terme indexé par $\tilde{M}'$ intervenant dans (2). Il faut montrer que, si $\tilde{M}'$ n'est pas relevant, $X(\tilde{M}')$ est nul. En tout cas, $X(\tilde{M}')$ est un transfert d'un élément de $D^{st}_{géom,\lambda_1}(\tilde{G}'_1(F_V))\otimes Mes(G'(F_V))^*$ qui est induit à partir d'un élément de $D^{st}_{géom,\lambda_1}(\tilde{M}'_1(F_V))\otimes Mes(M'(F_V))^*$. Il s'ensuit que, pour que $X(\tilde{M}')$ soit nul, il suffit qu'il existe une place $v\in V$ telle que l'espace de Levi localisé $\tilde{M}'_v$ ne soit pas relevant. Par hypothèse, $\tilde{M}'$ n'est pas relevant. Par définition, cela signifie soit que $\tilde{M}'(F)=\emptyset$, soit qu'il existe $v\in Val(F)$ tel que $\tilde{M}'_v$ n'est pas relevant. La première possibilité est exclue : $\mathbf{G}'$ est relevant, donc $\tilde{G}'(F)\neq\emptyset$ et alors $\tilde{M}'(F)\neq\emptyset$ puisque $\tilde{M}'$ est un espace de Levi de $\tilde{G}'$. Donc il existe une place $v\in Val(F)$ telle que $\tilde{M}'_v$ n'est pas relevant. Il reste à montrer qu'une telle place appartient à V. Pour $v\notin V$, G est quasi-déployé sur F_v donc il existe un espace de Levi $\tilde{M}_v$ de $\tilde{G}_v$ tel que $\tilde{M}'_v$ apparaisse comme l'espace associé à une donnée endoscopique elliptique $\mathbf{M}'_v$ de $(M_v,\tilde{M}_v,\mathbf{a}_{M_v})$. Parce que $\mathbf{G}'$ est non ramifiée en v, $\mathbf{M}'_v$ l'est aussi. Alors $\mathbf{M}'_v$ est relevante d'après le lemme [I] 6.2. $\square$

On applique la formule de définition 1.10(3) et la formule (2) ci-dessus. On obtient

$$A^{\tilde{G},\mathcal{E}}(V,\mathcal{X},\omega)=\sum_{\mathbf{G}'\in\mathcal{E}(\tilde{G},\mathbf{a},V)}\sum_{\mathcal{X}_{G'}\in Stab(\tilde{G}'(F)),\mathcal{X}_{G'}\mapsto\mathcal{X}}i(\tilde{G},\tilde{G}')$$

$$\sum_{\tilde{M}'\in\mathcal{L}(\tilde{M}'_0),\tilde{M}'\text{ relevant}}|W^{M'}||W^{G'}|^{-1}\sum_{\mathcal{X}_{M'}\in\mathbf{Stab}(\tilde{M}'(F)),\mathcal{X}_{M'}\mapsto\mathcal{X}_{G'}}\sum_{i=1,...,n(\mathcal{X}_{M'})}$$

$$s_{\mathbf{M}'}^{\mathbf{G}'}(Sk_i^{\mathbf{M}'}(\mathcal{X}_{M'})_S^V,\tilde{K}_S^V)\,transfert(SA_i^{\mathbf{G}'}(\mathcal{X}_{M'})_V).$$

Pour un élément $\mathbf{G}'\in\mathcal{E}(\tilde{G},\mathbf{a})$ et un espace de Levi $\tilde{M}'$ de $\tilde{G}'$, que l'on identifiera dans la notation à une "donnée de Levi" $\mathbf{M}'$, définissons un terme $S(\mathbf{G}',\mathbf{M}')$ de la façon suivante. Si $\mathbf{G}'$ n'est pas non ramifiée hors de V ou si $\mathbf{M}'$ n'est pas relevant, on pose $S(\mathbf{G}',\mathbf{M}')=0$. Si $\mathbf{G}'$ est non ramifiée hors de V et si $\mathbf{M}'$ est relevant, on pose

$$S(\mathbf{G}',\mathbf{M}')=\sum_{\mathcal{X}_{G'}\in Stab(\tilde{G}'(F)),\mathcal{X}_{G'}\mapsto\mathcal{X}}\sum_{\mathcal{X}_{M'}\in\mathbf{Stab}(\tilde{M}'(F)),\mathcal{X}_{M'}\mapsto\mathcal{X}_{G'}}\sum_{i=1,...,n(\mathcal{X}_{M'})}s_{\mathbf{M}'}^{\mathbf{G}'}(Sk_i^{\mathbf{M}'}(\mathcal{X}_{M'})_S^V,\tilde{K}_S^V)$$

$$transfert(SA_i^{\mathbf{G}'}(\mathcal{X}_{M'})_V).$$

La formule ci-dessus se récrit

$$A^{\tilde{G},\mathcal{E}}(V,\mathcal{X},\omega)=\sum_{\mathbf{G}'\in\mathcal{E}(\tilde{G},\mathbf{a},V)} i(\tilde{G},\tilde{G}')\sum_{\tilde{M}'\in\mathcal{L}(\tilde{M}'_0)}|W^{M'}||W^{G'}|^{-1}S(\mathbf{G}',\mathbf{M}').$$

On peut appliquer la proposition [VI] 6.5. La formule de cette proposition fait apparaître des Levi $\hat{M}$ du groupe dual $\hat{G}$. Cela parce que l'on considérait une situation générale où le terme $S(\mathbf{G}',\mathbf{M}')$ pouvait être non nul même si $\mathbf{M}'$ n'était pas relevant. Ici, seuls peuvent apparaître des $\mathbf{M}'$ qui sont relevants et des $\hat{M}$ correspondant à des espaces de Levi $\tilde{M}$ de $\tilde{G}$. On peut récrire cette proposition en sommant sur de tels espaces $\tilde{M}$ et de telles données endoscopiques de $(M,\tilde{M},\mathbf{a}_M)$. On obtient

$$(3)\qquad A^{\tilde{G},\mathcal{E}}(V,\mathcal{X},\omega)=\sum_{\tilde{M}\in\mathcal{L}(\tilde{M}_0)}|W^{\tilde{M}}||W^{\tilde{G}}|^{-1}\sum_{\mathbf{M}'\in\mathcal{E}(\tilde{M},\mathbf{a}_M)} i(\tilde{M},\tilde{M}')$$
$$\sum_{\tilde{s}\in\tilde{\zeta}Z(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}} i_{\tilde{M}'}(\tilde{G},\tilde{G}'(\tilde{s}))S(\mathbf{G}'(\tilde{s}),\mathbf{M}').$$

On a noté simplement $\tilde{\zeta}$ le terme tel que $\mathbf{M}'=(M',\mathcal{M}',\tilde{\zeta})$. On peut limiter la somme en $\mathbf{M}'$ aux éléments de $\mathcal{E}(\tilde{M},\mathbf{a}_M,V)$. En effet, si $\mathbf{M}'$ n'est pas ramifié hors de V, les données $\mathbf{G}'(\tilde{s})$ apparaissant ne sont pas non plus non ramifiées hors de V et les termes $S(\mathbf{G}'(\tilde{s}),\mathbf{M}')$ sont nuls. D'autre part, fixons $\tilde{M}$, $\mathbf{M}'$ et $\tilde{s}$ intervenant ci-dessus. On a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}\mathbf{Stab}(\tilde{M}'(F)) & \to & \mathbf{Stab}(\tilde{G}'(\tilde{s};F))\\ \downarrow & & \downarrow\\ \mathbf{Stab}(\tilde{M}(F)) & \to & \mathbf{Stab}(\tilde{G}(F))\end{array}$$

Dans la définition de $S(\mathbf{G}'(\tilde{s}),\mathbf{M}')$, on peut donc remplacer la double somme en $\mathcal{X}_{G'(\tilde{s})}$ tel que $\mathcal{X}_{G'(\tilde{s})}\mapsto\mathcal{X}$ et en $\mathcal{X}_{M'}$ tel que $\mathcal{X}_{M'}\mapsto\mathcal{X}_{G'(\tilde{s})}$ par une double somme sur $\mathcal{X}_M\in\mathbf{Stab}(\tilde{M}(F))$ tel que $\mathcal{X}_M\mapsto\mathcal{X}$ et sur $\mathcal{X}_{M'}\in\mathbf{Stab}(\tilde{M}'(F))$ tel que $\mathcal{X}_{M'}\mapsto\mathcal{X}_M$. On a aussi l'égalité $transfert(SA_i^{\mathbf{G}'(\tilde{s})}(\mathcal{X}_{M'})_V)=(transfert(SA_i^{\mathbf{M}'}(\mathcal{X}_{M'})_V))^{\tilde{G}}$. On obtient

$$S(\mathbf{G}'(\tilde{s}),\mathbf{M}')=\sum_{\mathcal{X}_M\in\mathbf{Stab}(\tilde{M}(F)),\mathcal{X}_M\mapsto\mathcal{X}}\ \sum_{\mathcal{X}_{M'}\in\mathbf{Stab}(\tilde{M}'(F)),\mathcal{X}_{M'}\mapsto\mathcal{X}_M}$$
$$\sum_{i=1,\dots,n(\mathcal{X}_{M'})} s_{\mathbf{M}'}^{\mathbf{G}'(\tilde{s})}(Sk_i^{\mathbf{M}'}(\mathcal{X}_{M'})_S^V,\tilde{K}_S^V)(transfert(SA_i^{\mathbf{M}'}(\mathcal{X}_{M'})_V))^{\tilde{G}}.$$

Pour $\mathcal{X}_{M'}\in\mathbf{Stab}(\tilde{M}'(F))$, posons

$$(4)\qquad b(\mathbf{M}',\mathcal{X}_{M'})=\sum_{i=1,\dots,n(\mathcal{X}_{M'})}(transfert(SA_i^{\mathbf{M}'}(\mathcal{X}_{M'})_V))^{\tilde{G}}$$
$$\sum_{\tilde{s}\in\tilde{\zeta}Z(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}} i_{\tilde{M}'}(\tilde{G},\tilde{G}'(\tilde{s}))s_{\mathbf{M}'}^{\mathbf{G}'(\tilde{s})}(Sk_i^{\mathbf{M}'}(\mathcal{X}_{M'})_S^V,\tilde{K}_S^V).$$

Pour $\mathcal{X}_M\in\mathbf{Stab}(\tilde{M}(F))$, posons

$$(5)\qquad B(\tilde{M},\mathcal{X}_M)=\sum_{\mathbf{M}'\in\mathcal{E}(\tilde{M},\mathbf{a}_M,V)} i(\tilde{M},\tilde{M}')\sum_{\mathcal{X}_{M'}\in\mathbf{Stab}(\tilde{M}'(F)),\mathcal{X}_{M'}\mapsto\mathcal{X}_M} b(\mathbf{M}',\mathcal{X}_{M'}).$$

Les considérations ci-dessus permettent de récrire l'égalité (3) sous la forme

$$(6) \qquad A^{\tilde{G},\mathcal{E}}(V,\mathcal{X},\omega)=\sum_{\tilde{M}\in\mathcal{L}(\tilde{M}_0)}|W^{\tilde{M}}||W^{\tilde{G}}|^{-1}\sum_{\mathcal{X}_M\in\mathbf{Stab}(\tilde{M}(F)),\mathcal{X}_M\mapsto\mathcal{X}}B(\tilde{M},\mathcal{X}_M).$$

Dans la formule (4), on reconnaît la somme en $\tilde{s}$: elle est égale à $r_{\tilde{M}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{M}',Sk_i^{\mathbf{M}'}(\mathcal{X}_{M'})_S^V,\tilde{K}_S^V)$. On applique la proposition 2.2(i) et on obtient

$$(7) \qquad b(\mathbf{M}',\mathcal{X}_{M'})=\sum_{i=1,\dots,n(\mathcal{X}_{M'})}r_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(transfert(Sk_i^{\mathbf{M}'}(\mathcal{X}_{M'})_S^V),\tilde{K}_S^V)$$

$$(transfert(SA_i^{\mathbf{M}'}(\mathcal{X}_{M'})_V))^{\tilde{G}}.$$

On a supposé ici $\mathbf{M}'$ non ramifié hors de V. Mais le membre de droite ci-dessus conserve un sens si $\mathbf{M}'$ est seulement non ramifié hors de S. Pour un tel $\mathbf{M}'$, on définit $b(\mathbf{M}',\mathcal{X}_{M'})$ par l'égalité (7). Si $\mathbf{M}'$ est non ramifié hors de S mais pas hors de V, on a $b(\mathbf{M}',\mathcal{X}_{M'})=0$: cela résulte de la proposition 2.2(ii). Dans la définition (5), on peut donc étendre la somme en $\mathbf{M}'\in\mathcal{E}(\tilde{M},\mathbf{a}_M,V)$ en une somme en $\mathbf{M}'\in\mathcal{E}(\tilde{M},\mathbf{a}_M,S)$. C'est-à-dire

$$(8) \qquad B(\tilde{M},\mathcal{X}_M)=\sum_{\mathbf{M}'\in\mathcal{E}(\tilde{M},\mathbf{a}_M,S)}i(\tilde{M},\tilde{M}')\sum_{\mathcal{X}_{M'}\in\mathbf{Stab}(\tilde{M}'(F)),\mathcal{X}_{M'}\mapsto\mathcal{X}_M}b(\mathbf{M}',\mathcal{X}_{M'}).$$

On note $\underline{A}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(V,\mathcal{X},\omega)$ le membre de droite de l'égalité du (i) de la proposition 2.3. Pour $\tilde{M}\in\mathcal{L}(\tilde{M}_0)$ et $\mathcal{X}_M\in\mathbf{Stab}(\tilde{M}(F))$, posons

- si $\tilde{M}\neq\tilde{G}$,

$$\underline{B}(\tilde{M},\mathcal{X}_M)=\sum_{i=1,\dots,n(\mathcal{X}_M)}r_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(k_i^{\tilde{M}}(\mathcal{X}_M,\omega)_S^V,\tilde{K}_S^V)A_i^{\tilde{G}}(\mathcal{X}_M,\omega)_V;$$

- si $\tilde{M}=\tilde{G}$,

$$\underline{B}(\tilde{G},\mathcal{X}_G)=\sum_{i=1,\dots,n(\mathcal{X}_G)}r^{\tilde{G},\mathcal{E}}(k_i^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathcal{X}_G,\omega)_S^V,\tilde{K}_S^V)A_i^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathcal{X}_G,\omega)_V.$$

On a alors

$$(9) \qquad \underline{A}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(V,\mathcal{X},\omega)=\sum_{\tilde{M}\in\mathcal{L}(\tilde{M}_0)}|W^{\tilde{M}}||W^{\tilde{G}}|^{-1}\underline{B}(\tilde{M},\mathcal{X}_M).$$

Fixons $\tilde{M}\in\mathcal{L}(\tilde{M}_0)$ et $\mathcal{X}_M\in\mathbf{Stab}(\tilde{M}(F))$. Par définition, on a

$$A^{\tilde{M},\mathcal{E}}(S,\mathcal{X}_M,\omega)=\sum_{\mathbf{M}'\in\mathcal{E}(\tilde{M},\mathbf{a}_M,V)}i(\tilde{M},\tilde{M}')\sum_{\mathcal{X}_{M'}\in\mathbf{Stab}(\tilde{M}'(F)),\mathcal{X}_{M'}\mapsto\mathcal{X}_M}transfert(SA^{\mathbf{M}'}(S,\mathcal{X}_{M'})).$$

En utilisant (1), on obtient

$$A^{\tilde{M},\mathcal{E}}(S,\mathcal{X}_M,\omega)=\sum_{\mathbf{M}'\in\mathcal{E}(\tilde{M},\mathbf{a}_M,S)}i(\tilde{M},\tilde{M}')\sum_{\mathcal{X}_{M'}\in\mathbf{Stab}(\tilde{M}'(F)),\mathcal{X}_{M'}\mapsto\mathcal{X}_M}$$

$$\sum_{i=1,\dots,n(\mathcal{X}_{M'})}transfert(Sk_i^{\mathbf{M}'}(\mathcal{X}_{M'})_S^V)transfert(SA_i^{\mathbf{M}'}(\mathcal{X}_{M'})_V).$$

Si $\tilde{M} \neq \tilde{G}$, on a $A^{\tilde{M},\mathcal{E}}(S, \mathcal{X}_M, \omega) = A^{\tilde{M}}(S, \mathcal{X}_M, \omega)$ d'après les hypothèses de récurrence. Alors la décomposition ci-dessus est de la forme 2.3(1) : l'ensemble d'indices $\{1, ..., n(\mathcal{X}_M)\}$ est la réunion disjointe des $\{1, ..., n(\mathcal{X}_{M'})\}$ sur les $\mathbf{M}'$ et $\mathcal{X}_{M'}$ intervenant ci-dessus. Si $\tilde{M} = \tilde{G}$, cette décomposition est de même de la forme 2.3(4). Il en résulte par définition que

$$\underline{B}(\tilde{M}, \mathcal{X}_M) = \sum_{\mathbf{M}' \in \mathcal{E}(\tilde{M}, \mathbf{a}_M, S)} i(\tilde{M}, \tilde{M}') \sum_{\mathcal{X}_{M'} \in \mathbf{Stab}(\tilde{M}'(F)), \mathcal{X}_{M'} \mapsto \mathcal{X}_M}$$

$$\sum_{i=1,...,n(\mathcal{X}_{M'})} r_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(transfert(Sk_i^{\mathbf{M}'}(\mathcal{X}_{M'})_S^V), \tilde{K}_S^V)(transfert(SA_i^{\mathbf{M}'}(\mathcal{X}_{M'})_V))^{\tilde{G}}.$$

En utilisant (7) et (8), on voit que

$$\underline{B}(\tilde{M}, \mathcal{X}_M) = B(\tilde{M}, \mathcal{X}_M).$$

Alors les membres de droite de (6) et (9) coïncident. Cela prouve l'égalité

$$(10) \qquad A^{\tilde{G},\mathcal{E}}(V, \mathcal{X}, \omega) = \underline{A}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(V, \mathcal{X}, \omega),$$

ce qui est le (i) de la proposition 2.3.

Prouvons maintenant le (ii) de cette proposition. On suppose $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$ quasi-déployé et à torsion intérieure. Soit $\mathcal{X} \in \mathbf{Stab}(\tilde{G}(F))$. La formule 1.10(3) se modifie en

$$A^{\tilde{G},\mathcal{E}}(V, \mathcal{X}) = SA^{\tilde{G}}(V, \mathcal{X}) + \sum_{\mathbf{G}' \in \mathcal{E}(\tilde{G}, \mathbf{a}, V), \mathbf{G}' \neq \mathbf{G}}$$

$$\sum_{\mathcal{X}_{G'} \in \mathbf{Stab}(\tilde{G}'(F)), \mathcal{X}_{G'} \mapsto \mathcal{X}} i(\tilde{G}, \tilde{G}') transfert(SA^{\mathbf{G}'}(V, \mathcal{X}_{G'})).$$

Pour $\mathbf{G}' \neq \mathbf{G}$, on a encore l'égalité (2) et on peut remplacer le terme $transfert(SA^{\mathbf{G}'}(V, \mathcal{X}_{G'}))$ ci-dessus par le membre de droite de cette égalité. Pour $\mathbf{G}' = \mathbf{G}$, le membre de droite de (2) est égal au membre de droite de l'égalité du (ii) de la proposition 2.3. On ne sait pas qu'il est égal à $SA^{\tilde{G}}(V, \mathcal{X})$, c'est ce qu'on veut prouver. Mais on peut remplacer $SA^{\tilde{G}}(V, \mathcal{X})$ par le membre de droite de (2), plus un nombre C dont on veut prouver qu'il est nul. Le calcul se poursuit comme précédemment et on obtient l'égalité

$$A^{\tilde{G},\mathcal{E}}(V, \mathcal{X}) = C + \underline{A}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(V, \mathcal{X}).$$

Mais, comme on l'a dit au début de la preuve, dans notre situation quasi-déployée à torsion intérieure, le (i) de la proposition 2.3, c'est-à-dire l'égalité (10), est tautologique. On conclut $C = 0$, ce qui prouve le (ii) de la proposition 2.3.

2.5 Extension de l'ensemble fini de places

Corollaire. *(i) Soit V un ensemble fini de places de F contenant V_{ram} et soit $\mathcal{X} \in$* $\mathbf{Stab}(\tilde{G}(F))$*. Supposons qu'il existe un ensemble fini S de places de F contenant V et tel que l'assertion du théorème 1.10(i) soit vérifiée pour le couple $(S, \mathcal{X})$. Alors cette assertion est vérifiée pour le couple $(V, \mathcal{X})$.*

(ii) Supposons $(G,\tilde{G},\mathbf{a})$ quasi-déployé et à torsion intérieure. Alors la même propriété vaut pour le théorème 1.10(ii).

Preuve. Si $A^{\tilde{G},\mathcal{E}}(S,\mathcal{X},\omega)=A^{\tilde{G}}(S,\mathcal{X},\omega)$, on peut supposer que les décompositions 2.3 (1) et 2.3 (4) de cette distribution coïncident. L'égalité 2.3(2) et celle du (i) de la proposition 2.3 entraînent alors l'égalité $A^{\tilde{G},\mathcal{E}}(V,\mathcal{X},\omega)=A^{\tilde{G}}(V,\mathcal{X},\omega)$. Supposons $(G,\tilde{G},\mathbf{a})$ quasi-déployé et à torsion intérieure. L'hypothèse du (ii) de la proposition 2.3 est vérifiée. La formule de cette proposition exprime $SA^{\tilde{G}}(V,\mathcal{X})$ comme combinaison linéaire de distributions stables. Donc $SA^{\tilde{G}}(V,\mathcal{X})$ est stable. La distribution $SA^{\tilde{G}}(S,\mathcal{X})$ ne dépend que des classes de conjugaison par $G_{AD}(F_v)$ des $\tilde{K}_v$ pour $v\not\in S$. Elle ne dépend pas des $\tilde{K}_v$ pour $v\in S-V$. Pour un espace de Levi $\tilde{M}\in\mathcal{L}(\tilde{M}_0)$ et pour $\mathcal{X}_M\in\mathbf{Stab}(\tilde{M}(F))$, la distribution $SA^{\tilde{M}}(S,\mathcal{X}_{\tilde{M}})$ vérifie les mêmes propriétés. En effet, elle ne dépend que des classes de conjusaison par $M_{AD}(F_v)$ des $\tilde{K}_v\cap\tilde{M}(F_v)$ pour $v\not\in S$. On a vu dans la preuve de [II] 4.2(3) que, si $\tilde{K}_v$ et $\tilde{K}'_v$ sont conjugués par un élément de $G_{AD}(F_v)$ et sont tous deux en bonne position relativement à M, alors les espaces $\tilde{K}_v\cap\tilde{M}(F_v)$ et $\tilde{K}'_v\cap\tilde{M}(F_v)$ sont conjugués par un élément de $M_{ad}(F_v)$. L'assertion s'ensuit. Alors, pour $v\not\in S$, la formule du (ii) de la proposition 2.3 ne dépend que de la classe de conjugaison par $G_{AD}(F_v)$ de $\tilde{K}_v$. Pour $v\in S-V$, la formule ne dépend des $\tilde{K}_v$ que par les formes linéaires $s^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(.,\tilde{K}^V_S)$. Or, d'après 2.2(1), celles-ci ne dépendent que des classes de conjugaison par $G_{AD}(F_v)$ des $\tilde{K}_v$ pour $v\in S-V$. Finalement, $SA^{\tilde{G}}(V,\mathcal{X})$ ne dépend que des classes de conjugaison par $G_{AD}(F_v)$ des $\tilde{K}_v$ pour $v\not\in V$. $\square$

3 Enoncés de nouveaux théorèmes

3.1 Le théorème d'Arthur

Supposons ici $G=\tilde{G}$, $\mathbf{a}=1$, $\tilde{K}_v=K_v$ pour tout $v\not\in V$.

Théorème. *Sous ces hypothèses, les théorèmes 1.10(i) et (ii) sont vérifiés.*

C'est l'un des principaux résultats de l'article d'Arthur ([A1] global theorem 1'). La preuve que nous donnerons des théorèmes 1.10(i) et (ii) étant directement inspirée de celle d'Arthur, nous pourrions aussi bien les redémontrer entièrement. Mais cela n'aurait aucun intérêt. Nous préférons simplifier un peu la nôtre en utilisant le résultat d'Arthur. La propriété 1.10(1) de $SA^G(V,\mathcal{X})$ n'est pas clairement énoncée par Arthur, mais est incluse dans sa démonstration. On la retrouve en tout cas de la façon suivante. Considérons d'autres sous-groupes hyperspéciaux K'_v pour $v\not\in V$, soumis aux conditions de [VI] 1.1. Ces conditions impliquent qu'il existe un ensemble fini de places S contenant V tel que $K'_v=K_v$ pour $v\not\in S$. La distribution $SA^G(S,\mathcal{X})$ ne change donc pas quand on remplace les K_v par les K'_v. On sait qu'elle est stable d'après le théorème d'Arthur. De plus, pour $v\in S-V$, les compacts K_v et K'_v sont conjugués par un élément de $G_{AD}(F_v)$: il en est ainsi pour tout couple de sous-groupes compacts hyperspéciaux. La preuve du corollaire 2.5 montre que la distribution $SA^G(V,\mathcal{X})$ ne change pas non plus quand on remplace les K_v par les K'_v.

En fait, nous n'utiliserons le théorème d'Arthur que pour l'élément $\mathcal{X}$ correspondant à la classe de conjugaison stable réduite à $\{1\}$. Dans ce cas, on note plutôt nos distributions $A^{\tilde{G},\mathcal{E}}_{unip}(V)$ et $SA^{\tilde{G}}_{unip}(V)$.

3.2 Définition d'une autre distribution stable

On suppose que $(G,\tilde{G},\mathbf{a})$ est quasi-déployé et à torsion intérieure. Soient $\mathcal{X}\in \mathbf{Stab}(\tilde{G}(F))$ et V un ensemble fini de places contenant V_{ram}. On a vu que $\mathcal{X}$ correspondait à une classe de conjugaison stable dans $\tilde{G}_{ss}(F)$. On sait qu'il existe un élément ϵ de cette classe telle que G_ϵ soit quasi-déployé. On fixe un tel ϵ. Soit U_ϵ un voisinage ouvert de l'unité dans $G_\epsilon(F_V)$ qui vérifie les conditions suivantes :

$x\in U_\epsilon$ si et seulement si sa partie semi-simple x_{ss} appartient à U_ϵ ;

si $x\in U_\epsilon$ et $y\in G_\epsilon(F_V)$ sont conjugués par un élément de $Z_G(\epsilon;\bar{F}_V)$ (où $\bar{F}_V=\prod_{v\in V}\bar{F}_v$), alors $y\in U_\epsilon$.

On note $\tilde{U}$ l'ensemble des éléments de $\tilde{G}(F_V)$ dont la partie semi-simple est stablement conjuguée à un élément de $U_\epsilon\epsilon$. On note $SI(\tilde{U})$, resp. $SI(U_\epsilon)$, le sous-espace des éléments de $SI(\tilde{G}(F_V))$, resp. $SI(G_\epsilon(F_V))$, à support dans $\tilde{U}$, resp. U_ϵ. On pose $\Xi_\epsilon=Z_G(\epsilon)/G_\epsilon$. Ce groupe est naturellement muni d'une action galoisienne. On a établi en [I] lemme 4.8 un isomorphisme de descente $desc^{st}_\epsilon : SI(\tilde{U})\otimes Mes(G(F_V))\simeq SI(U_\epsilon)^{\Xi_\epsilon^{\Gamma_{F_V}}}\otimes Mes(G_\epsilon(F_V))$ pourvu que U_ϵ soit assez petit. Dans cette référence, on avait fixé les mesures mais l'isomorphisme devient canonique quand on l'écrit sous la forme ci-dessus. Rappelons la caractérisation de l'isomorphisme. Soit $x\in U_\epsilon$ tel que $x\epsilon\in\tilde{G}_{reg}(F_V)$. Fixons une mesure de Haar sur $(G_\epsilon)_x(F_V)=G_{x\epsilon}(F_V)$. Rappelons que la donnée de x et de la mesure définit un élément de $D^{st}_{orb}(U_\epsilon)\otimes Mes(G_\epsilon(F_V))^*$, à savoir l'intégrale orbitale stable $S^{G_\epsilon}(x,.)$. De même, la donnée de $x\epsilon$ et de la mesure définit une intégrale orbitale stable $S^{\tilde{G}}(x\epsilon,.)$. Soient alors $\mathbf{f}\in SI(\tilde{U})\otimes Mes(G(F_V))$ et $\mathbf{f}_\epsilon=desc^{st}_\epsilon(\mathbf{f})$. On a l'égalité

$$S^{G_\epsilon}(x,\mathbf{f}_\epsilon)=S^{\tilde{G}}(x\epsilon,\mathbf{f}).$$

Les distributions de 1.10 dépendent d'une mesure sur $\mathfrak{A}_G$ fixée en [VI] 1.3. On doit aussi fixer une mesure sur $\mathfrak{A}_{G_\epsilon}$. Dans le cas général, le choix est arbitraire. Mais, si on suppose ϵ elliptique, on a $\mathfrak{A}_{G_\epsilon}=\mathfrak{A}_G$ et on choisit la mesure déjà fixée sur ce dernier espace.

Rappelons que, pour tout groupe réductif connexe H défini sur F, on pose

$$\tau(H)=|\pi_0(Z(\hat{H})^{\Gamma_F})||ker^1(F,Z(\hat{G}))|^{-1},$$

cf. [VI] 5.1. Supposons

(1) $S(\mathcal{X})\subset V$.

On définit une distribution $\underline{SA}^{\tilde{G}}(V,\mathcal{X})\in D_{géom}(\tilde{G}(F_V))\otimes Mes(G(F_V))^*$ de la façon suivante. Si $\mathcal{X}$ n'est pas elliptique ou si V ne contient pas $S(\mathcal{X},\tilde{K})$, on pose $\underline{SA}^{\tilde{G}}(V,\mathcal{X})=0$. Supposons

(2) $\mathcal{X}$ est elliptique et $S(\mathcal{X},\tilde{K})\subset V$.

Soit $\mathbf{f}\in C_c^\infty(\tilde{G}(F_V))\otimes Mes(G(F_V))$. On restreint f à $\tilde{U}$. On considère l'image dans $SI(\tilde{U})\otimes Mes(G(F_V))$ de cette restriction. On note $\mathbf{f}_\epsilon\in SI(U_\epsilon)^{\Xi_\epsilon^{\Gamma_{F_V}}}\otimes Mes(G_\epsilon(F_V))$ l'image de l'élément obtenu par l'isomorphisme $desc^{st}_\epsilon$. On pose

$$I^{\tilde{G}}(\underline{SA}^{\tilde{G}}(V,\mathcal{X}),\mathbf{f})=|\Xi_\epsilon^{\Gamma_F}|\tau(G)\tau(G_\epsilon)^{-1}S^{G_\epsilon}(SA^{G_\epsilon}_{unip}(V),\mathbf{f}_\epsilon).$$

Rappelons que l'on sait que $SA^{G_\epsilon}_{unip}(V)$ est stable et indépendante de tout choix de sous-groupes compacts hyperspéciaux, cf. 3.1. Cela donne un sens à cette définition. Puisque $SA^{G_\epsilon}_{unip}(V)$ est à support unipotent, la définition ne dépend pas du choix de U_ϵ. Elle ne dépend pas non plus du choix de ϵ. En effet, remplaçons ϵ par ϵ' vérifiant les mêmes propriétés. On peut fixer $y \in G$ tel que $y^{-1}\epsilon y = \epsilon'$ et $y\sigma(y)^{-1} \in G_\epsilon$ pour tout $\sigma \in \Gamma_F$. Parce que l'on suppose G_ϵ et $G_{\epsilon'}$ quasi-déployés, on peut supposer que $ad_{y^{-1}}$ envoie une paire de Borel épinglée définie sur F de G_ϵ sur une telle paire de de $G_{\epsilon'}$. Cela entraîne que $y\sigma(y)^{-1}$ appartient au centre de G_ϵ. Alors l'isomorphisme $ad_{y^{-1}} : G_\epsilon \to G_{\epsilon'}$ est défini sur F. Cet isomorphisme identifie $SA^{G_\epsilon}_{unip}(V)$ à $SA^{G_{\epsilon'}}_{unip}(V)$ et $\mathbf{f}_\epsilon$ à $\mathbf{f}_{\epsilon'}$. L'indépendance affirmée s'ensuit.

Remarquons que

(3) $\underline{SA}^{\tilde{G}}(V,\mathcal{X})$ est stable.

En effet, si l'image de $\mathbf{f}$ dans $SI(\tilde{G}(F_V)) \otimes Mes(G(F_V))$ est nulle, alors $\mathbf{f}_\epsilon = 0$. L'assertion s'ensuit.

La distribution $\underline{SA}^{\tilde{G}}(V,\mathcal{X})$ dépend évidemment de diverses données. Mais, quant à sa dépendance des espaces hyperspéciaux $\tilde{K}_v$, on a

(4) $\underline{SA}^{\tilde{G}}(V,\mathcal{X})$ ne dépend que des classes de conjugaison par $G_{AD}(F_v)$ des $\tilde{K}_v$ pour $v \notin V$.

En effet, la définition ci-dessus ne dépend des $\tilde{K}_v$ pour $v \notin V$ que par la condition $S(\mathcal{X},\tilde{K}) \subset V$. Or, d'après la définition de l'ensemble $S(\mathcal{X},\tilde{K})$, cette condition ne dépend que des classes de conjugaison par $G_{AD}(F_v)$ des $\tilde{K}_v$ pour $v \notin V$.

Théorème . *Pour tout $\mathcal{X} \in \mathbf{Stab}(\tilde{G}(F))$ et tout V contenant $S(\mathcal{X})$, on a l'égalité*

$$\underline{SA}^{\tilde{G}}(V,\mathcal{X}) = SA^{\tilde{G}}(V,\mathcal{X}).$$

Cela sera démontré en 3.4.

3.3 Enoncé du théorème principal

En [III] 6.3, on a défini certains triplets $(G,\tilde{G},\mathbf{a})$ particuliers. Dans cette référence, le corps de base était local non-archimédien, mais les définitions et résultats valent aussi bien sur notre corps de nombres. Considérons un tel triplet. Rappelons que G est quasi-déployé sur F et simplement connexe. On a $\mathbf{a} = 1$. Notons Θ_F l'ensemble des $\eta \in \tilde{G}(F)$ tels qu'il existe une paire de Borel épinglée $\mathcal{E}$ de G définie sur F de sorte que ad_η conserve $\mathcal{E}$. Cet ensemble n'est pas vide. L'ensemble des classes de conjugaison stable contenant un élément de Θ_F, que l'on note $\Theta_F/st-conj$, est en bijection avec $\mathcal{Z}(\tilde{G})^{\Gamma_F}$. De plus, l'application naturelle

$$\mathcal{Z}(\tilde{G}) \to (T^*/(1-\theta^*)(T^*)) \times_{\mathcal{Z}(G)} \mathcal{Z}(\tilde{G})$$

est injective, cf. preuve de [III] 6.3(3). On voit alors que l'ensemble $\Theta_F/st-conj$ est paramétré par le sous-ensemble fini $\mathbf{Stab}_{excep}(\tilde{G}(F))$ de $\mathbf{Stab}(\tilde{G}(F))$ défini de la façon suivante. C'est l'ensemble des $(\mu,\omega_{\bar{G}})$ tels que μ appartienne à l'image de $\mathcal{Z}(\tilde{G})^{\Gamma_F}$ par l'application précédente. On a alors $W(\mu) = W^{\theta^*}$ donc $\omega_{\bar{G}}$ est forcément trivial. L'indice *excep* signifie exceptionnel. Si $(G,\tilde{G},\mathbf{a})$ n'est pas l'un des triplets définis en [III] 6.3, on pose $\mathbf{Stab}_{excep}(\tilde{G}(F)) = \emptyset$.

Considérons un triplet $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$ quelconque.

Théorème . *Soient $\mathcal{X} \in \mathbf{Stab}(\tilde{G}(F))$ et V un ensemble fini de places contenant $S(\mathcal{X})$. On suppose $\mathcal{X} \notin \mathbf{Stab}_{excep}(\tilde{G}(F))$. Alors on a l'égalité*

$$A^{\tilde{G}}(V, \mathcal{X}, \omega) = \sum_{\mathbf{G}' \in \mathcal{E}(\tilde{G}, \mathbf{a}, V)} \sum_{\mathcal{X}' \in \mathbf{Stab}(G'(F)); \mathcal{X}' \mapsto \mathcal{X}} i(\tilde{G}, \tilde{G}') transfert(\underline{SA}^{\mathbf{G}'}(V, \mathcal{X}')).$$

D'après 1.7(3), on a $S(\mathcal{X}') \subset S(\mathcal{X}) \subset V$ pour tout $\mathcal{X}'$ intervenant ci-dessus. Alors les termes $\underline{SA}^{\mathbf{G}'}(V, \mathcal{X}')$ sont déduits de ceux définis au paragraphe précédent par les constructions formelles habituelles. La démonstration du théorème occupe les sections 5 à 8.

3.4 Le théorème 3.3 implique les théorèmes 3.2, 1.10(ii) et [VI] 5.2

On suppose que $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$ est quasi-déployé et à torsion intérieure. En particulier, ce n'est pas l'un des triplets définis en [III] 6.3 et l'ensemble $\mathbf{Stab}_{excep}(\tilde{G}(F))$ est vide. Soient $\mathcal{X} \in \mathbf{Stab}(\tilde{G}(F))$ et V un ensemble fini de places contenant $S(\mathcal{X})$. Soient $\mathbf{G}' \in \mathcal{E}(\tilde{G}, V)$ tel que $\mathbf{G}' \neq \mathbf{G}$ et $\mathcal{X}' \in \mathbf{Stab}(\tilde{G}'(F))$ tel que $\mathcal{X}' \mapsto \mathcal{X}$. Comme on l'a dit, on a $S(\mathcal{X}') \subset S(\mathcal{X}) \subset V$ et on peut appliquer le théorème 3.2 par récurrence : $\underline{SA}^{\mathbf{G}'}(V, \mathcal{X}') = SA^{\mathbf{G}'}(V, \mathcal{X}')$. L'égalité du théorème 3.3 se récrit

$$A^{\tilde{G}}(V, \mathcal{X}) = \underline{SA}^{\tilde{G}}(V, \mathcal{X}) + \sum_{\mathbf{G}' \in \mathcal{E}(\tilde{G}, V), \mathbf{G}' \neq \mathbf{G}} \sum_{\mathcal{X}' \in \mathbf{Stab}(G'(F)); \mathcal{X}' \mapsto \mathcal{X}} i(\tilde{G}, \tilde{G}') transfert(SA^{\mathbf{G}'}(V, \mathcal{X}')).$$

En utilisant la définition 1.10(2), cela entraîne

$$\underline{SA}^{\tilde{G}}(V, \mathcal{X}) = SA^{\tilde{G}}(V, \mathcal{X}),$$

ce qui prouve le théorème 3.2.

Grâce au théorème 3.2, les propriétés 3.2(3) et 3.2(4) de la distribution $\underline{SA}^{\tilde{G}}(V, \mathcal{X})$ impliquent l'assertion du théorème 1.10(ii) sous la restriction $S(\mathcal{X}) \subset V$. Le corollaire 2.5 permet de supprimer cette restriction, d'où le théorème 1.10(ii).

Soit V un ensemble fini de places de F contenant V_{ram}. En utilisant le théorème 1.10(ii), la proposition 1.12(iii) entraîne que $SA^{\tilde{G}}(V, \mathcal{O}_V)$ est stable pour tout $\mathcal{O}_V \in \tilde{G}_{ss}(F_V)/st-conj$ et qu'elle ne dépend que des classes de conjugaison par $G_{AD}(F_v)$ des $\tilde{K}_v$ pour $v \notin V$. Ce sont les assertions du théorème [VI] 5.2.

A ce point, on peut remarquer que le théorème 3.2 permet de retrouver la formule habituelle pour une distribution $SA^{\tilde{G}}(V, \mathcal{O}_V)$ associée à une classe de conjugaison stable elliptique et fortement régulière. Précisément, considérons un élément $\delta \in \tilde{G}(F)$ elliptique et fortement régulier. Notons $\mathcal{X}$ le paramètre de sa classe de conjugaison stable. Fixons un ensemble fini V de places de F contenant $S(\mathcal{X}, \tilde{K})$. Notons $\mathcal{O}_V$ la classe de conjugaison stable de δ dans $\tilde{G}(F_V)$, fixons un ensemble de représentants $\dot{\mathcal{Y}}_\delta$ des classes de conjugaison par $G(F_V)$ contenues dans $\mathcal{O}_V$. Fixons une mesure de Haar dx sur $G_\delta(F_V)$. Pour $\delta' \in \dot{\mathcal{Y}}_\delta$, $G_{\delta'}(F_V)$ est isomorphe à $G_\delta(F_V)$ et on munit le premier groupe de la mesure correspondant à dx. Soient $f \in C_c^\infty(\tilde{G}(F_V))$ et dg une mesure de Haar sur $G(F_V)$. Alors on a l'égalité

$$(1) \qquad S^{\tilde{G}}(SA^{\tilde{G}}(V, \mathcal{O}_V), f \otimes dg) = \tau(G)\tau(G_\delta)^{-1} mes(\mathfrak{A}_G G_\delta(F) \backslash G_\delta(\mathbb{A}_F))$$

$$\sum_{\delta'\in\dot{\mathcal{Y}}_\delta}\int_{G_{\delta'}(F_V)\backslash G(F_V)} f(g^{-1}\delta' g)\,dg.$$

Preuve. Notons $\mathcal{X}_V$ l'image naturelle de $\mathcal{X}$ dans $\mathbf{Stab}(\tilde{G}(F_V))$. La condition de forte régularité imposée à δ implique que l'ensemble de sommation de la proposition 1.12(iii) est réduit à $\{\mathcal{X}\}$. Donc $SA^{\tilde{G}}(V,\mathcal{O}_V)=SA^{\tilde{G}}(V,\mathcal{X})$. Grâce au théorème 3.2, ceci est égal à $\underline{SA}^{\tilde{G}}(V,\mathcal{X})$. On utilise la définition de ce terme. Par forte régularité, le groupe Ξ_δ est réduit à $\{1\}$. On obtient

$$S^{\tilde{G}}(SA^{\tilde{G}}(V,\mathcal{O}_V),f\otimes dg)=\tau(G)\tau(G_\delta)^{-1}S^{G_\delta}(SA^{G_\delta}_{unip}(V),(f\otimes dg)_\delta).$$

Puisque G_δ est un tore, on a $SA^{G_\delta}_{unip}(V)=A^{G_\delta}_{unip}(V)$. Ecrivons $(f\otimes dg)_\delta=\varphi\otimes dx$. D'après [VI] 2.2, on a

$$I^{G_\delta}(A^{G_\delta}_{unip}(V),\varphi\otimes dx)=mes(\mathfrak{A}_G G_\delta(F)\backslash G_\gamma(\mathbb{A}_F))\varphi(1).$$

Il résulte de la définition de l'application de descente que

$$\varphi(1)=\sum_{\delta'\in\dot{\mathcal{Y}}_\delta}\int_{G_{\delta'}(F_V)\backslash G(F_V)} f(g^{-1}\delta' g)\,dg.$$

En mettant ces calculs bout à bout, on obtient (1). $\square$

Comme on l'expliquera en 4.1, si la mesure dx et la mesure sur $\mathfrak{A}_G$ sont les mesures de Tamagawa, on a l'égalité $mes(\mathfrak{A}_G G_\delta(F)\backslash G_\delta(\mathbb{A}_F))=\tau(G_\delta)$. Alors la formule (1) se simplifie en

$$S^{\tilde{G}}(SA^{\tilde{G}}(V,\mathcal{O}_V),f\otimes dg)=\tau(G)\sum_{\delta'\in\dot{\mathcal{Y}}_\delta}\int_{G_{\delta'}(F_V)\backslash G(F_V)} f(g^{-1}\delta' g)\,dg.$$

On retrouve ainsi les formules de [KS] et [Lab3].

3.5 Le théorème 3.3 implique presque les théorèmes 1.10(i) et [VI] 5.4

Soit V un ensemble fini de places de F contenant V_{ram}. On définit l'ensemble $\mathbf{Stab}_{excep}(\tilde{G}(F_V))$ de la même façon qu'en 3.3. Il est vide si $(G,\tilde{G},\mathbf{a})$ n'est pas l'un des triplets définis en [III] 6.3. Si $(G,\tilde{G},\mathbf{a})$ est l'un de ces triplets, $\mathbf{Stab}_{excep}(\tilde{G}(F_V))$ paramètre les classes de conjugaison stable dans $\tilde{G}(F_V)$ d'éléments $\eta_V=(\eta_v)_{v\in V}\in\tilde{G}_{ss}(F_V)$ tels que, pour tout $v\in V$, il existe une paire de Borel épinglée $\mathcal{E}_v$ de G définie sur F_v de sorte que ad_{η_v} conserve $\mathcal{E}_v$. L'ensemble $\mathbf{Stab}_{excep}(\tilde{G}(F_V))$ est en bijection avec $\prod_{v\in V}\mathcal{Z}(\tilde{G})^{\Gamma_{F_v}}$. C'est un ensemble fini.

Proposition. *(i) Le théorème 3.3 implique l'assertion du théorème 1.10(i) pour* $\mathcal{X}\notin\mathbf{Stab}_{excep}(\tilde{G}(F))$.

(ii) Le théorème 3.3 implique l'assertion du théorème [VI] 5.4 pour toute classe $\mathcal{O}_V\in\tilde{G}_{ss}(F_V)/st-conj$ *qui est paramétrée par un élément de* $\mathbf{Stab}(\tilde{G}(F_V))$ *qui n'appartient pas à* $\mathbf{Stab}_{excep}(\tilde{G}(F_V))$.

Preuve. On peut supposer que $(G,\tilde{G},\mathbf{a})$ n'est pas quasi-déployé et à torsion intérieure, sinon les théorèmes 1.10(i) et [VI] 5.4 sont tautologiques. Soit $\mathcal{X}\in\mathbf{Stab}(\tilde{G}(F))-\mathbf{Stab}_{excep}(\tilde{G}(F))$, supposons d'abord $S(\mathcal{X})\subset V$. Comme dans le paragraphe précédent, les hypothèses de récurrence permettent d'appliquer le théorème 3.2, cette fois pour tout $\mathbf{G}'$. Alors l'égalité du théorème 3.3 devient

$$A^{\tilde{G}}(V,\mathcal{X},\omega)=\sum_{\mathbf{G}'\in\mathcal{E}(\tilde{G},\mathbf{a},V)}\sum_{\mathcal{X}'\in\mathbf{Stab}(G'(F));\mathcal{X}'\mapsto\mathcal{X}}i(\tilde{G},\tilde{G}')transfert(SA^{\mathbf{G}'}(V,\mathcal{X}')).$$

En comparant avec 1.10(3), on obtient

$$A^{\tilde{G}}(V,\mathcal{X},\omega)=A^{\tilde{G},\mathcal{E}}(V,\mathcal{X},\omega).$$

Cela démontre le théorème 1.10(i) sous la restriction $S(\mathcal{X})\subset V$. Celle-ci disparaît grâce au corollaire 2.5. Cela prouve (i).

L'application $\mathbf{Stab}(\tilde{G}(F))\to\mathbf{Stab}(\tilde{G}(F_V))$ envoie $\mathbf{Stab}_{excep}(\tilde{G}(F))$ dans $\mathbf{Stab}_{excep}(\tilde{G}(F_V))$. Pour une classe $\mathcal{O}_V$ qui est paramétrée par un élément de $\mathbf{Stab}(\tilde{G}(F_V))$ qui n'est pas exceptionnel, les $\mathcal{X}$ qui interviennent dans les formules (i) et (ii) de la proposition 1.12 ne sont donc pas exceptionnels. Le théorème 1.10(i) déjà démontré pour les éléments non exceptionnels implique que les membres de droite de ces deux formules sont égaux. D'où l'égalité des membres de gauche, ce qui est l'assertion du théorème [VI] 5.4. $\square$

3.6 Le théorème [VI] 5.4 implique le théorème 1.10(i) et étend le théorème 3.3

A la fin du présent article, nous aurons démontré le théorème 3.3, avec ses conséquences décrites dans les deux paragraphes précédents. Nous compléterons ultérieurement la preuve du théorème [VI] 5.4, c'est-à-dire nous le démontrerons pour les classes $\mathcal{O}_V$ paramétrées par des éléments de $\mathbf{Stab}_{excep}(\tilde{G}(F_V))$. Montrons que cela suffira pour compléter la preuve du théorème 1.10(i). Soit $\mathcal{X}\in\mathbf{Stab}(\tilde{G}(F))$. Si $\mathcal{X}$ n'est pas exceptionnel, on a vu ci-dessus que l'assertion du théorème 1.10(i) résultait du théorème 3.3. Supposons $\mathcal{X}\in\mathbf{Stab}_{excep}(\tilde{G}(F))$. Cet élément paramètre une classe de conjugaison stable $\mathcal{O}$. Il s'envoie sur un élément $\mathcal{X}_V\in\mathbf{Stab}_{excep}(\tilde{G}(F_V))$, qui paramètre la classe $\mathcal{O}_V$. En général, l'application $\mathbf{Stab}(\tilde{G}(F))\to\mathbf{Stab}(\tilde{G}(F_V))$ n'est pas injective. Mais ici, la fibre de cette application au-dessus de $\mathcal{X}_V$ est réduite à $\{\mathcal{X}\}$. En effet, le défaut d'injectivité est dû au fait qu'un cocycle $\omega_{\bar{G}}$ n'est pas toujours déterminé par ses restrictions $\omega_{\bar{G},v}$ pour $v\in V$. Ici, $\mathcal{X}$ est l'image d'un couple $(\mu,\omega_{\bar{G}})$ tel que $\mu\in\mathcal{Z}(\tilde{G})^{\Gamma_F}$. On a $W(\mu)=W^{\theta^*}$ tout entier et tout cocycle $\omega'_{\bar{G}}$ complétant μ en un élément $(\mu,\omega'_{\bar{G}})\in Stab(\tilde{G}(F))$ est forcément trivial. Les assertions (i) et (ii) de la proposition 1.12 se réduisent aux égalites

$$A^{\tilde{G}}(V,\mathcal{O}_V,\omega)=A^{\tilde{G}}(V,\mathcal{X},\omega),$$

$$A^{\tilde{G},\mathcal{E}}(V,\mathcal{O}_V,\omega)=A^{\tilde{G},\mathcal{E}}(V,\mathcal{X},\omega).$$

Le théorème [VI] 5.4 affirme l'égalité des deux membres de gauche. D'où l'égalité des membres de droite, ce qui est l'assertion du théorème 1.10(i).

Sous la même hypothèse, l'égalité du théorème 3.3 est valable pour tout $\mathcal{X}\in\mathbf{Stab}(\tilde{G}(F))$. En effet, comme dans le paragraphe précédent, le membre de droite de cette égalité est égal à $A^{\tilde{G},\mathcal{E}}(V,\mathcal{X},\omega)$. Le théorème 1.10(i) affirme que ce terme est égal à $A^{\tilde{G}}(V,\mathcal{X},\omega)$.

3.7 Quelques cas faciles

Soient $\mathcal{X} \in \mathbf{Stab}(\tilde{G}(F))$ et V contenant $S(\mathcal{X})$. On considère les hypothèses suivantes :
(1) V contient $S(\mathcal{X}, \tilde{K})$;
(2) $\mathcal{X}$ est elliptique ;
(3) pour toute place $v \in Val(F)$, l'image de $\mathcal{X}$ dans $\mathbf{Stab}(\tilde{G}(F_v))$ appartient à l'image de l'application $\chi^{\tilde{G}_v}$;
(4) les restrictions de ω à $Z(G; \mathbb{A}_F)^\theta$ et à $Z(\bar{G}; \mathbb{A}_F)$ sont triviales.

Lemme. *Si l'une de ces hypothèses n'est pas satisfaite, l'égalité du théorème 3.3 est vérifiée, les deux membres étant nuls.*

Preuve. Les assertions 1.9 (1), (2) et (3) nous disent que $A^{\tilde{G}}(V, \mathcal{X}, \omega) = 0$ si (1), resp (2), (4), n'est pas vérifiée. On a aussi $A^{\tilde{G}}(V, \mathcal{X}, \omega) = 0$ par définition si (3) n'est pas vérifiée car a fortiori $\mathcal{X}$ n'est pas dans l'image de $\chi^{\tilde{G}}$.

Considérons maintenant le membre de droite de l'égalité . Soient $\mathbf{G}'$ et $\mathcal{X}'$ y intervenant. Supposons $transfert(SA^{\mathbf{G}'}(V, \mathcal{X}')) \neq 0$. On va prouver que les conditions (1) à (4) sont alors vérifiées. Les relations 1.7(3) et (4) nous disent que $S(\mathcal{X}') \subset S(\mathcal{X}) \subset V$ et $S(\mathcal{X}, \tilde{K}) - S(\mathcal{X}) \subset S(\mathcal{X}', \tilde{K}') - S(\mathcal{X}')$. La non-nullité de $SA^{\mathbf{G}'}(V, \mathcal{X}')$ entraîne $S(\mathcal{X}', \tilde{K}') \subset V$ d'après 3.2(2). Ces inclusions entraînent (1). De même, 3.2(2) implique que $\mathcal{X}'$ est elliptique, d'où (2) d'après 1.7(2). Notons $\mathcal{O}'$ la classe de conjugaison stable dans $\tilde{G}'(F)$ associée à $\mathcal{X}'$. Puisque $\underline{SA}^{\mathbf{G}'}(V, \mathcal{X}')$ est à support dans la classe de conjugaison stable $\mathcal{O}'_V$ dans $\tilde{G}'(F_V)$ engendrée par $\mathcal{O}'$, la non-nullité de $transfert(\underline{SA}^{\mathbf{G}'}(V, \mathcal{X}'))$ entraîne que cette classe correspond à une classe de conjugaison stable dans $\tilde{G}(F_V)$. D'après le lemme 1.8, il existe pour tout $v \in V$ une classe $\mathcal{O}_v \in \tilde{G}_{ss}(F_v)/st-conj$ qui corresponde à $\mathcal{O}'_v$ et dont l'image par $\chi^{\tilde{G}_v}$ soit l'image de $\mathcal{X}$ dans $\mathbf{Stab}(\tilde{G}(F_v))$. Puisqu'on a déjà prouvé que (1) était vérifiée, le lemme 1.8(2) entraîne la même propriété pour $v \notin V$. Cela entraîne (3). Cela entraîne aussi que, pour toute place v, on peut fixer un diagramme $(\epsilon, B', T', B, T, \eta)$ défini sur F_v, avec $\epsilon \in \tilde{G}'_{ss}(F_v)$ et $\eta \in \mathcal{O}_v$. D'après [KS] lemme 4.4.C, ω est trivial sur $T^{\theta,0}(F_v)$. A fortiori ω est trivial sur le sous-groupe $Z(G_\eta; F_v) \subset T^{\theta,0}(F_v)$. Cela équivaut à ce que la restriction de ω à $Z(\bar{G}; F_v)$ soit triviale. Enfin, l'existence de $\mathbf{G}'$ entraîne que ω est trivial sur $Z(G; \mathbb{A}_F)^\theta$ (cf. par exemple [I] lemme 2.7). Cela vérifie la condition (4). $\square$

4 Distributions à support unipotent

4.1 Mesures de Tamagawa

Dans ce paragraphe, G est un groupe réductif connexe défini sur F. Pour toute place finie v de F, on note $\mathfrak{o}_v$ l'anneau des entiers de F_v, $\mathfrak{p}_v$ son idéal maximal et $\mathbb{F}_v$ le corps résiduel. Pour toute place $v \in Val(F)$, on munit F_v d'une mesure de Haar de sorte que $mes(\mathfrak{o}_v) = 1$ pour presque toute place finie v. Le produit de ces mesures est une mesure sur $\mathbb{A}_F$. On suppose que $mes(\mathbb{A}_F/F) = 1$. Fixons une forme différentielle de degré maximal sur $\mathfrak{g}$, définie sur F et non nulle. Pour toute place v, on déduit de cette forme différentielle et de la mesure sur F_v une mesure dX_v sur $\mathfrak{g}(F_v)$. Rappelons que l'ensemble des mesures de Haar sur $\mathfrak{g}(F_v)$ s'identifie à celui des mesures de Haar sur

$G(F_v)$: deux mesures se correspondent si et seulement si le jacobien de l'application exponentielle, calculé pour ces mesures, vaut 1 au point $0 \in \mathfrak{g}(F_v)$. On a donc aussi une mesure dg_v sur $G(F_v)$. Fixons un ensemble fini V de places de F, contenant les places archimédiennes, de sorte que G soit non ramifié hors de V. Notons ρ_G la représentation de Γ_F dans $X^*(G) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$. On note $L_v(\rho_G, s)$ sa fonction L en la place v et $L^V(\rho_G, s)$ sa fonction L partielle hors de V. Notons r l'ordre du pôle en 1 de la fonction $L^V(\rho_G, s)$ et posons

$$\ell_G^V = lim_{s\to 1}(s-1)^r L^V(\rho_G, s).$$

La mesure de Tamagawa sur $G(\mathbb{A}_F)$ est par définition égale à

$$(\ell_G^V)^{-1}(\prod_{v\notin V} L_v(\rho_G, 1)dg_v) \otimes (\prod_{v\in V} dg_v),$$

ce produit étant convergent.

Conformément à nos définitions de [VI] 1.1, il se déduit de la mesure de Tamagawa sur $G(\mathbb{A}_F)$ une mesure dg_V^{Tam} sur $G(F_V)$. En effet, fixons pour tout $v \notin V$ un sous-groupe compact hyperspécial K_v de $G(F_v)$. On a une mesure canonique dg_v^{can} sur $G(F_v)$ telle que la mesure de K_v soit 1. Alors dg_V^{Tam} est la mesure telle que $dg_V^{Tam} \otimes \otimes_{v\notin V} dg_v^{can}$ soit la mesure de Tamagawa sur $G(\mathbb{A}_F)$. D'une façon générale, si X est un ensemble muni d'une mesure dx et si Y est un sous-ensemble mesurable de X, notons $mes(Y, dx)$ la mesure de Y. La définition entraîne que dg_V^{Tam} est égale à

$$(1) \qquad (\ell_G^V)^{-1}(\prod_{v\notin V} L_v(\rho_G, 1) mes(K_v, dg_v)) \prod_{v\in V} dg_v.$$

Soit $v \notin V$. On sait qu'à K_v est associé un schéma en groupes $\mathcal{K}_v$ sur $\mathfrak{o}_v$. On note $\mathfrak{k}_v$ le groupe des points sur $\mathfrak{o}_v$ de son algèbre de Lie. C'est une sous-$\mathfrak{o}_v$-algèbre de $\mathfrak{g}(F_v)$. On note $\mathbb{K}_v$ la fibre résiduelle de $\mathcal{K}_v$. On a un homomorphisme surjectif $K_v \to \mathbb{K}_v(\mathbb{F}_v)$ dont on note K_v^1 le noyau. Alors l'exponentielle se restreint en un isomorphisme $\mathfrak{p}_v\mathfrak{k}_v \to K_v^1$ qui préserve les mesures. La formule précédente se récrit sous la forme suivante : notre mesure dg_V^{Tam} sur $G(F_V)$ est égale à

$$(2) \qquad (\ell_G^V)^{-1}(\prod_{v\notin V} L_v(\rho_G, 1)|\mathbb{K}_v(\mathbb{F}_v)| mes(\mathfrak{p}_v\mathfrak{k}_v, dX_v)) \prod_{v\in V} dg_v.$$

Jusqu'à la fin de l'article, pour tout groupe G et tout ensemble V de places comme ci-dessus, on munit $G(\mathbb{A}_F)$ et $G(F_V)$ des mesures de Tamagawa. Cela nous débarrasse des espaces de mesures.

On a aussi besoin d'une mesure sur $\mathfrak{A}_G$. Rappelons la normalisation habituelle dans le cadre des mesures de Tamagawa. Identifions $\mathfrak{A}_G$ à $Hom(X^*(G)^{\Gamma_F}, \mathbb{R})$, où $X^*(G)$ est le groupe des caractères algébriques de G. On définit le réseau $\mathfrak{A}_{G,\mathbb{Z}} = Hom(X^*(G)^{\Gamma_F}, \mathbb{Z})$. La mesure "de Tamagawa" sur $\mathfrak{A}_G$ est celle pour laquelle ce réseau est de covolume 1. Si on munit $G(\mathbb{A}_F)$ de la mesure de Tamagawa et que l'on choisit cette mesure sur $\mathfrak{A}_G$, on sait que la mesure de

$$\mathfrak{A}_G G(F)\backslash G(\mathbb{A}_F)$$

est égale au terme $\tau(G)$ défini en 3.2. Mais cette normalisation est peu commode. Par exemple, elle n'est pas compatible avec la situation de 4.2(2) ci-dessous. On fixe donc la mesure sur $\mathfrak{A}_G$ sans supposer qu'il s'agit de la mesure de Tamagawa. On note $covol(\mathfrak{A}_{G,\mathbb{Z}})$

le covolume de ce réseau et $\tau'(G)$ la mesure de $\mathfrak{A}_G G(F)\backslash G(\mathbb{A}_F)$ calculée à l'aide de notre mesure sur $\mathfrak{A}_G$. On a alors l'égalité

$$(3) \qquad \tau'(G) = covol(\mathfrak{A}_{G,\mathbb{Z}})^{-1}\tau(G).$$

4.2 Compatibilité des mesures

Considérons les deux situations suivantes.

(1) On se donne une suite exacte

$$1 \to C_1 \to G_1 \to G \to 1$$

de groupes réductifs connexes définis sur F, où C_1 est un tore central induit. On a une suite exacte

$$1 \to \mathfrak{A}_{C_1} \to \mathfrak{A}_{G_1} \to \mathfrak{A}_G \to 1.$$

On suppose qu'elle est compatible aux mesures. On fixe un ensemble fini V de places de F tel que les trois groupes soient non ramifiés hors de V.

(2) On se donne une suite exacte

$$1 \to \Xi \to G_1 \times G_2 \to G \to 1$$

où G_1, G_2 et G sont des groupes réductifs connexes définis sur F et Ξ est un sous-groupe fini central de $G_1 \times G_2$. On fixe un ensemble fini V de places de F tel que G_1, G_2 et G soient non ramifiés hors de V et tel que le nombre d'éléments de X soit premier à p pour tout nombre premier p divisant une place hors de V.

Lemme. *(i) Dans la situation (1), la suite exacte*

$$1 \to C_1(F_V) \to G_1(F_V) \to G(F_V) \to 1$$

est compatible aux mesures. On a l'égalité $\tau'(G_1) = \tau'(C_1)\tau'(G)$.

(ii) Dans la situation (2), le revêtement

$$G_1(F_V) \times G_2(F_V) \to G(F_V)$$

préserve localement les mesures.

Preuve. On effectue les constructions du paragraphe précédent en adaptant les notations de façon évidente.

Considérons la situation (1). Fixons un isomorphisme d'algèbres de Lie

$$\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{c}_1 \oplus \mathfrak{g}.$$

On fixe des formes différentielles de degré maximal sur $\mathfrak{c}_1$ et $\mathfrak{g}$, définies sur F et non nulles. Par produit tensoriel, on en déduit une telle forme sur $\mathfrak{g}_1$. Pour chaque place v, on associe à ces formes des mesures de Haar sur $C_1(F_v)$, $G_1(F_v)$ et $G(F_v)$ comme dans le paragraphe précédent. La suite

$$1 \to C_1(F_v) \to G_1(F_v) \to G(F_v) \to 1$$

est compatible à ces mesures. On a aussi $\rho_{G_1} = \rho_{C_1} \oplus \rho_G$. On en déduit que la suite

$$1 \to C_1(\mathbb{A}_F) \to G_1(\mathbb{A}_F) \to G(\mathbb{A}_F) \to 1$$

est compatible aux mesures de Tamagawa. La dernière assertion du (i) résulte alors de [Oe] théorème 5.3 (dont l'énoncé se simplifie grâce à l'hypothèse que C_1 est induit). Pour $v \notin V$, le sous-groupe compact hyperspécial $K_{C_1,v}$ de $C_1(F_v)$ est unique et on peut choisir des sous-groupes compacts hyperspéciaux dans $G_1(F_v)$ et $G(F_v)$ qui fixent le même point hyperspécial de l'immeuble commun du groupe $G_{1,AD} = G_{AD}$. Alors la suite

$$1 \to \mathbb{K}_{C_1,v} \to \mathbb{K}_{1,v} \to \mathbb{K}_v \to 1$$

est exacte. Le théorème de Lang entraîne que la suite déduite

$$1 \to \mathbb{K}_{C_1,v}(\mathbb{F}_v) \to \mathbb{K}_{1,v}(\mathbb{F}_v) \to \mathbb{K}_v(\mathbb{F}_v) \to 1$$

est exacte. La suite

$$0 \to \mathfrak{k}_{C_1,v} \to \mathfrak{k}_{1,v} \to \mathfrak{k}_v \to 0$$

est aussi exacte. De ces deux faits, on déduit par un argument familier que la suite

$$1 \to K_{C_1,v} \to K_{1,v} \to K_v \to 1$$

est aussi exacte. D'après la compatibilité des mesures, on a $mes(K_{C_1,v}, dc_{1,v})mes(K, dg) = mes(K_1, dg_1)$. La première assertion de (i) résulte alors de la formule (1) du paragraphe précédent.

Considérons la situation (2). On a un isomorphisme

$$\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2 \simeq \mathfrak{g}.$$

On peut supposer que la forme différentielle fixée sur $\mathfrak{g}$ est le produit des formes différentielles fixées sur $\mathfrak{g}_1$ et sur $\mathfrak{g}_2$. Pour toute place v, l'isomorphisme

$$\mathfrak{g}_1(F_v) \oplus \mathfrak{g}_2(F_v) \simeq \mathfrak{g}(F_v)$$

est alors compatible aux mesures déduites de ces formes. Donc le revêtement

$$G_1(F_v) \times G_2(F_v) \to G(F_v)$$

préserve localement ces mesures. Pour prouver le (ii) du lemme, il suffit de prouver que la constante figurant dans la formule (2) du paragraphe précédent pour G est le produit des constantes pour G_1 et pour G_2. On a l'égalité $\rho_G = \rho_{G_1} \oplus \rho_{G_2}$, les constantes provenant des fonctions L sont donc compatibles. Soit $v \notin V$. On peut de nouveau supposer que les sous-groupes hyperspéciaux de $G_1(F_v) \times G_2(F_v)$ et de $G(F_v)$ fixent le même point hyperspécial de l'immeuble commun du groupe G_{AD}. L'hypothèse que $|\Xi|$ est premier à la caractéristique résiduelle de F_v entraîne que l'on a l'égalité

$$\mathfrak{k}_v = \mathfrak{k}_{1,v} \oplus \mathfrak{k}_{2,v}$$

et que la suite

$$1 \to \Xi \to \mathbb{K}_{1,v} \times \mathbb{K}_{2,v} \to \mathbb{K}_v \to 1$$

est exacte. L'égalité ci-dessus entraîne

$$(1) \qquad mes(\mathfrak{p}_v\mathfrak{k}_v) = mes(\mathfrak{p}_v\mathfrak{k}_{1,v})mes(\mathfrak{p}_v\mathfrak{k}_{2,v}).$$

La suite exacte ci-dessus, jointe au théorème de Lang, entraîne l'exactitude de la suite

$$1 \to \Xi^{\Gamma_v^{nr}} \to \mathbb{K}_{1,v}(\mathbb{F}_v) \times \mathbb{K}_{2,v}(\mathbb{F}_v) \to \mathbb{K}(\mathbb{F}_v) \to H^1(\Gamma_v^{nr};\Xi) \to 1.$$

On vérifie facilement l'égalité

$$|\Xi^{\Gamma_v^{nr}}| = |H^1(\Gamma_v^{nr};\Xi)|$$

qui est valable pour tout Γ_v^{nr}-module abélien fini Ξ. D'où

$$(2) \qquad |\mathbb{K}_{1,v}(\mathbb{F}_v) \times \mathbb{K}_{2,v}(\mathbb{F}_v)| = |\mathbb{K}(\mathbb{F}_v)|.$$

Les égalités (1) et (2) entraînent l'égalité requise des constantes. □

4.3 Coefficients et revêtement

Dans la suite de cette section, on considère un triplet $(G,\tilde{G},\mathbf{a})$ tel que $\tilde{G}=G$. Mais on n'impose pas que $\mathbf{a}=1$. On impose toutefois que ω est trivial sur $Z(G;\mathbb{A}_F)$. On suppose $\tilde{K}_v = K_v$ pour tout $v \notin V_{ram}$. On considère un sous-tore $Z \subset Z(G)$ et un groupe réductif connexe $G_\sharp$. On suppose donné un homomorphisme $q : G_\sharp \to G$. Ces trois données sont définies sur F. On pose $G_\flat = Z \times G_\sharp$ et on prolonge q par l'identité sur Z. On obtient ainsi un homomorphisme noté $q_\flat : G_\flat \to G$. On suppose qu'il s'inscrit dans une suite exacte

$$1 \to \Xi_\flat \to G_\flat \xrightarrow{q_\flat} G \to 1$$

où $\Xi_\flat$ est un sous-groupe fini central. On suppose que ω est trivial sur $q(G_\flat(\mathbb{A}_F))$. On fixe un ensemble fini V de places de F tel que $G_\flat$ et G soient non ramifiés hors de V et tel que le nombre d'éléments de $\Xi_\flat$ soit premier à tout nombre premier divisant une place $v \notin V$.

Exemple. On peut prendre $Z = Z(G)^0$, $G_\sharp = G_{SC}$ et $V \supset V_{ram}$. Ces données vérifient les conditions ci-dessus.

On note Ξ la projection de $\Xi_\flat$ dans $G_\sharp$. Pour toute place $v \in V$, fixons un voisinage ouvert $\Omega_{\sharp,v}$ de 1 dans $G_\sharp(F_v)$. On suppose que x appartient à $\Omega_{\sharp,v}$ si et seulement si la partie semi-simple de x appartient à $\Omega_{\sharp,v}$. On suppose que, si x et x' sont deux éléments de $G_\sharp(F_v)$ qui sont conjugués par un élément de $G_\sharp(\bar{F}_v)$, alors $x \in \Omega_{\sharp,v}$ si et seulement si $x' \in \Omega_{\sharp,v}$. On suppose enfin que, si $\xi \in \Xi(F_v)$ est différent de 1, alors $\Omega_{\sharp,v} \cap \xi\Omega_{\sharp,v} = \emptyset$. On pose $\Omega_v = q_\flat(Z(F_v) \times \Omega_{\sharp,v})$. On pose $\Omega_V = \prod_{v\in V}\Omega_v$, $\Omega_{\sharp,V} = \prod_{v\in V}\Omega_{\sharp,v}$. Fixons un ensemble de représentants $\mathcal{U}_V$ du quotient fini

$$q_\flat(G_\flat(F_V))\backslash G(F_V).$$

Pour $f \in C_c^\infty(\Omega_V)$ et $u \in \mathcal{U}_V$, on définit la fonction $({}^uf)_{G_\sharp}$ sur $\Omega_{\sharp,V}$ par $({}^uf)_{G_\sharp}(x) = f(u^{-1}q(x)u)$ pour tout $x \in \Omega_{\sharp,V}$. On pose

$$(1) \qquad \iota_{G_\sharp,G}(f) = |\mathcal{U}_V|^{-1}\sum_{u\in\mathcal{U}_V}\omega(u)({}^uf)_{G_\sharp}.$$

Cette application est le produit sur les places $v \in V$ de celles que l'on a définies et étudiées en [III] 3.1. Elle dépend du choix de $\mathcal{U}_V$, mais il s'en déduit une application

$$\iota_{G_\sharp,G} : I(\Omega_V,\omega) \to I(\Omega_{\sharp,V})$$

qui n'en dépend pas (les notations sont celles de [III] 3.1, adaptées à un ensemble fini de places). Elles sont aussi compatibles, en un sens facile à préciser, à un changement de voisinage $\Omega_{\sharp,V}$. Il s'en déduit dualement un homomorphisme

$$D_{g\acute{e}om}(\Omega_{\sharp,V}) \to D_{g\acute{e}om}(\Omega_V,\omega).$$

Celui-ci se restreint en un homomorphisme

$$\iota^*_{G_\sharp,G} : D_{unip}(G_\sharp(F_V)) \to D_{unip}(G(F_V),\omega).$$

On a fixé les mesures en 4.1, la distribution $A^G_{unip}(V,\omega)$ est donc un élément de $D_{unip}(G(F_V),\omega)$. Elle dépend de la mesure fixée sur $\mathfrak{A}_G$, mais $\tau'(G)^{-1}A^G_{unip}(V,\omega)$ n'en dépend pas. Elle dépend du groupe $K^V = \prod_{v\notin V} K_v$. Si nécessaire, on fait figurer ce groupe dans la notation. Pour le groupe $G_\sharp$ et pour $v \notin V$, on choisit pour sous-groupe hyperspécial $K_{\sharp,v}$ de $G_\sharp(F_v)$ le groupe tel que $K_{\sharp,v}$ et K_v fixent le même point hyperspécial de l'immeuble commun du groupe G_{AD}. Autrement dit $K_{\sharp,v} = q^{-1}(K_v)$. Soit S un sous-ensemble fini de places de F contenant V. Choisissons un ensemble de représentants $\mathcal{U}^V_S$ du quotient

$$q_\flat(G_\flat(F^V_S)\backslash G(F^V_S).$$

Pour $u = (u_v)_{v\in S-V} \in \mathcal{U}^V_S$, posons

$${}^uK^V_\sharp = (\prod_{v\notin S} K_{\sharp,v})(\prod_{v\in S-V} u_vK_{\sharp,v}u_v^{-1}).$$

Posons

$$A^{G_\sharp}_{unip;G,\omega,S}(V) = |\mathcal{U}^V_S|^{-1}\sum_{u\in\mathcal{U}^V_S}\omega(u)A^{G_\sharp}_{unip}(V,{}^uK^V_\sharp).$$

Cela ne dépend pas du choix de l'ensemble de représentants.

Proposition. *Si l'ensemble S est assez grand, la distribution $\tau'(G)^{-1}A^G_{unip}(V,\omega)$ est l'image par l'homomorphisme $\iota^*_{G_\sharp,G}$ de $\tau'(G_\sharp)^{-1}A^{G_\sharp}_{unip;G,\omega,S}(V)$.*

4.4 Preuve de la proposition 4.3

On doit commencer par quelques préliminaires. De tout Levi M de G se déduisent des Levi $M_\flat = q_\flat^{-1}(M)$ et $M_\sharp = q^{-1}(M)$ de $G_\flat$ et $G_\sharp$. Pour $v \in Val(F)$, on pose $K_{\sharp,v} = q^{-1}(K_v)$ et $K_{\flat,v} = q_\flat^{-1}(K_v)$. On note $K^M_v = M(F_v)\cap K_v$. On rappelle que l'on a fixé un Levi minimal M_0. On a l'égalité

$$q_\flat(M_{0,\flat}(F_v))\backslash M_0(F_v) = q_\flat(G_\flat(F_v))\backslash G(F_v).$$

On fixe un ensemble de représentants $\mathcal{U}_v$ de ce quotient, contenu dans $M_0(F_v)$. Considérons un ensemble fini S de places de F, contenant V et tel que :

(1) pour tout $M \in \mathcal{L}(M_0)$, on a les égalités

$$M(\mathbb{A}_F) = M(F)(M(F_S) \times K^{M,S}),\ M_\flat(\mathbb{A}_F) = M_\flat(F)(M_\flat(F_S) \times K_\flat^{M_\flat,S}).$$

Cette condition est vérifiée si S est assez grand. On va prouver l'assertion de la proposition pour un tel S. On pose $\mathcal{U}_S = \prod_{v \in S} \mathcal{U}_v$.

Soit φ une fonction intégrable sur $G(F)\mathfrak{A}_G\backslash G(\mathbb{A}_F)$. On suppose qu'elle est invariante à droite par $Z(G)^0(\mathbb{A}_F)K^S$. Montrons qu'on a l'égalité

$$(2) \qquad \tau'(G)^{-1} \int_{\mathfrak{A}_G G(F)\backslash G(\mathbb{A}_F)} \varphi(g)\, dg = \tau'(G_\sharp)^{-1}|\mathcal{U}_S|^{-1} \sum_{u \in \mathcal{U}_S} \int_{\mathfrak{A}_{G_\sharp} G_\sharp(F)\backslash G_\sharp(\mathbb{A}_F)} \varphi(q(x)u)\, dx.$$

Preuve. On commence par faire un calcul à des constantes multiplicatives près, étant entendu que ces constantes ne dépendent pas de φ. Notons Δ la projection dans $G(F_S)$ de $G(F) \cap (G(F_S) \times K^S)$ et définissons de même $\Delta_\flat$. En vertu de (1) et de l'invariance de φ par K^S, on a l'égalité

$$\int_{\mathfrak{A}_G G(F)\backslash G(\mathbb{A}_F)} \varphi(g)\, dg = \int_{\mathfrak{A}_G \Delta\backslash G(F_S)} \varphi(g)\, dg.$$

On montrera ci-dessous que

(3) $q_\flat(\Delta_\flat)$ est d'indice fini dans Δ.

Il existe donc $c_1 > 0$ tel que l'intégrale précédente soit égale à

$$c_1 \int_{\mathfrak{A}_G q_\flat(\Delta_\flat)\backslash G(F_S)} \varphi(g)\, dg.$$

Les hypothèses entraînent que $\mathfrak{A}_G = q_\flat(\mathfrak{A}_{G_\flat})$. Puisque $G(F_S) = \sqcup_{u \in \mathcal{U}_S} q_\flat(G_\flat(F_S))u$, on peut décomposer l'intégrale précédente en

$$c_1 \sum_{u \in \mathcal{U}_S} \int_{q_\flat(\mathfrak{A}_{G_\flat}\Delta_\flat)\backslash q_\flat(G_\flat(F_S))} \varphi(gu)\, dg.$$

Puisque $G_\flat(F_S) \to q_\flat(G_\flat(F_S))$ est un honnête revêtement, il existe une constante $c_2 > 0$ tel que l'expression précédente soit égale à

$$c_2 \sum_{u \in \mathcal{U}_S} \int_{\mathfrak{A}_{G_\flat}\Delta_\flat\backslash G_\flat(F_S)} \varphi(q_\flat(y)u)\, dy.$$

En utilisant (1) et l'invariance de la fonction à intégrer par $K_\flat^S$, on peut reconstituer cette expression comme

$$c_2 \sum_{u \in \mathcal{U}_S} \int_{\mathfrak{A}_{G_\flat} G_\flat(F)\backslash G_\flat(\mathbb{A}_F)} \varphi(q_\flat(y)u)\, dy.$$

Les intégrales se décomposent en produit d'intégrales sur $z \in \mathfrak{A}_Z Z(F)\backslash Z(\mathbb{A}_F)$ et sur $x \in \mathfrak{A}_{G_\sharp} G_\sharp(F)\backslash G_\sharp(\mathbb{A}_F)$. D'après l'hypothèse d'invariance de φ, la fonction à intégrer est constante en z. Puisque le volume de $\mathfrak{A}_Z Z(F)\backslash Z(\mathbb{A}_F)$ est fini, il existe $c_3 > 0$ tel que l'expression précédente soit égale à

$$c_3 \sum_{u \in \mathcal{U}_S} \int_{\mathfrak{A}_{G_\sharp} G_\sharp(F)\backslash G_\sharp(\mathbb{A}_F)} \varphi(q(x)u)\, dx.$$

Cela démontre l'égalité (2), au calcul près de la constante c_3. Pour calculer celle-ci, il suffit d'appliquer la relation obtenue à la fonction φ constante de valeur 1. $\square$

Preuve de (3). On peut définir

$$vol(\mathfrak{A}_G q_\flat(\Delta_\flat)\backslash G(F_S)) = \int_{\mathfrak{A}_G q_\flat(\Delta_\flat)\backslash G(F_S)} dg$$

ce terme pouvant valoir $+\infty$. L'assertion (3) équivaut à dire que ce volume est fini. On reprend le calcul ci-dessus en l'appliquant à la fonction φ constante de valeur 1. Il montre que $vol(\mathfrak{A}_G q_\flat(\Delta_\flat)\backslash G(F_S))$ est le produit d'une constante finie et de $vol(\mathfrak{A}_{G_\sharp} G_\sharp(F)\backslash G_\sharp(\mathbb{A}_F))$. On sait bien que ce dernier volume est fini. Donc $vol(\mathfrak{A}_G q_\flat(\Delta_\flat)\backslash G(F_S))$ l'est aussi et (3) est vérifiée. $\square$

Soit $f \in C_c^\infty(G(\mathbb{A}_F))$. Rappelons qu'en [VI] 2.1, pour un paramètre $T \in \mathcal{A}_{M_0}$ dans un certain cône, on a défini une fonction $g \mapsto k^T_{unip}(f,g)$ sur $Z(G;\mathbb{A}_F)\backslash G(\mathbb{A}_F)$, puis l'intégrale

$$J^T_{unip}(f,\omega) = \int_{\mathfrak{A}_G G(F)\backslash G(\mathbb{A}_F)} k^T_{unip}(f,g)\omega(g)\,dg.$$

Cette expression est asymptote à un polynôme en T, dont on note $J^G_{unip}(f,\omega)$ la valeur en un certain point T_0. Tous ces objets, y compris le point T_0, dépendent de $K = \prod_{v\in Val(F)} K_v$. Si nécessaire, on fait figurer ce groupe dans la notation. En appliquant (2), on obtient

$$\tau'(G)^{-1} J^T_{unip}(f,\omega) = \tau'(G_\sharp)^{-1}|\mathcal{U}_S|^{-1} \sum_{u\in\mathcal{U}_S} \int_{\mathfrak{A}_{G_\sharp} G_\sharp(F)\backslash G_\sharp(\mathbb{A}_F)} k^T_{unip}(f,q(x)u)\omega(u)\,dx$$

puisque ω est trivial sur $q_\flat(G_\flat(\mathbb{A}_F))$. Pour tout $u \in \mathcal{U}_S$, on pose ${}^uK_\sharp = uK_\sharp u^{-1}$ et on définit une fonction $({}^uf)_{G_\sharp}$ sur $G_\sharp(\mathbb{A}_F)$ par $({}^uf)_{G_\sharp}(x) = f(u^{-1}q(x)u)$. En reprenant les définitions de [LW], on voit qu'on a l'égalité

$$k^T_{unip}(f,q(x)u) = k^{G_\sharp,T-T_0+T_0({}^uK_\sharp)}_{unip}(({}^uf)_{G_\sharp},x,{}^uK_\sharp).$$

On en déduit l'égalité

$$(4) \qquad \tau'(G)^{-1} J^G_{unip}(f,\omega) = \tau'(G_\sharp)^{-1}|\mathcal{U}_S|^{-1} \sum_{u\in\mathcal{U}_S} \omega(u) J^{G_\sharp}_{unip}(({}^uf)_{G_\sharp},{}^uK_\sharp).$$

Supposons maintenant $f = f_V \otimes \mathbf{1}_{K^V}$, pour $f_V \in C_c^\infty(\Omega_V)$. En posant $\mathcal{U}_V = \prod_{v\in V}\mathcal{U}_v$ et $\mathcal{U}_S^V = \prod_{v\in S-V}\mathcal{U}_v$, on a $\mathcal{U}_S = \mathcal{U}_V \times \mathcal{U}_S^V$. Pour $u \in \mathcal{U}_S$, que l'on écrit $u = u'u''$, avec $u' \in \mathcal{U}_V$ et $u'' \in \mathcal{U}_S^V$, on a $({}^uf)_{G_\sharp} = ({}^{u'}f_V)_{G_\sharp} \otimes \mathbf{1}_{{}^{u''}K_\sharp^V}$, avec des notations naturelles. Pour le membre de gauche de (4), on peut utiliser le développement [VI] 2.2(1) relatif à K^V. Pour le terme indexé par u du membre de droite, on utilise le même développement relatif à ${}^uK_\sharp^V$. On obtient l'égalité

$$(5) \qquad \sum_{M\in\mathcal{L}(M_0)} |W^M||W^G|^{-1} X_M = 0,$$

où

$$X_M = \tau'(G)^{-1} J^G_M(A^M_{unip}(V,\omega),f_V) - \tau'(G_\sharp)^{-1}|\mathcal{U}_S|^{-1}$$
$$\sum_{u\in\mathcal{U}_S} \omega(u) J^{G_\sharp}_{M_\sharp}(A^{M_\sharp}_{unip}(V,{}^{u''}K_\sharp^{M_\sharp,V}),({}^{u'}f_V)_{G_\sharp},{}^{u'}K_{\sharp,V}).$$

Avec la définition de 4.3, on récrit

$$X_M=\tau'(G)^{-1}J_M^G(A^M_{unip}(V,\omega),f_V)-\tau'(G_\sharp)^{-1}|\mathcal{U}_V|^{-1}$$

$$\sum_{u\in\mathcal{U}_V}\omega(u)J^{G_\sharp}_{M_\sharp}(A^{M_\sharp}_{unip;M,\omega,S}(V),({}^uf_V)_{G_\sharp},{}^uK_{\sharp,V}).$$

Soit $M\in\mathcal{L}(M_0)$. Les distributions et intégrales orbitales pondérées intervenant dépendent de mesures sur $\mathfrak{A}_G$, $\mathfrak{A}_M$, $\mathfrak{A}_{G_\sharp}$ et $\mathfrak{A}_{M_\sharp}$. L'homomorphisme q définit un isomorphisme de $\mathfrak{A}_M/\mathfrak{A}_G$ sur $\mathfrak{A}_{M_\sharp}/\mathfrak{A}_{G_\sharp}$. On peut supposer que cet isomorphisme préserve les mesures. Pour tout $\boldsymbol{\gamma}\in D_{unip}(M_\sharp(F_V))$, on a alors l'égalité

$$(6)\qquad J^G_M(\iota^*_{M_\sharp,M}(\boldsymbol{\gamma}),\omega,f_V)=|\mathcal{U}_V|^{-1}\sum_{u\in\mathcal{U}_V}\omega(u)J^{G_\sharp}_{M_\sharp}(\boldsymbol{\gamma},({}^uf_V)_{G_\sharp},{}^uK_{\sharp,V}).$$

En effet, on a vu l'égalité analogue dans le cas local en [III] 3.3. Pour obtenir (5), on peut soit reprendre la preuve de ce cas local, soit utiliser les formules de scindage habituelles. On laisse les détails au lecteur.

Pour $M\neq G$, on peut utiliser la proposition 4.3 par récurrence : pour $\boldsymbol{\gamma}=\tau'(M_\sharp)^{-1}A^{M_\sharp}_{unip;M,\omega,S}(V)$, on a $\iota^*_{M_\sharp,M}(\boldsymbol{\gamma})=\tau'(M)^{-1}A^M_{unip}(V,\omega)$ (notons que la condition (1) imposée à S implique la même condition quand on remplace G par M). En utilisant (6), on transforme X_M en

$$(\tau'(G)^{-1}-\tau'(G_\sharp)^{-1}\tau'(M)^{-1}\tau'(M_\sharp))J^G_M(A^M_{unip}(V,\omega),f_V).$$

On montrera ci-dessous que

$$(7)\qquad \tau'(G)^{-1}\tau'(M)=\tau'(G_\sharp)^{-1}\tau'(M_\sharp).$$

On obtient alors $X_M=0$ pour tout Levi $M\neq G$. L'égalité (5) entraîne alors $X_G=0$. D'après les définitions, cela signifie que

$$\tau'(G)^{-1}I^G(A^G_{unip}(V,\omega),f_V)=\tau'(G_\sharp)^{-1}I^{G_\sharp}(A^{G_\sharp}_{unip;G,\omega,S}(V),\iota_{G_\sharp,G}(f_V)),$$

ou encore

$$\tau'(G)^{-1}I^G(A^G_{unip}(V,\omega),f_V)=\tau'(G_\sharp)^{-1}I^G(\iota^*_{G_\sharp,G}(A^{G_\sharp}_{unip;G,\omega,S}(V)),f_V).$$

Cela étant vrai pour tout $f_V\in C_c^\infty(\Omega_V)$, on en déduit

$$\tau'(G)^{-1}A^G_{unip}(V,\omega)=\tau'(G_\sharp)^{-1}\iota^*_{G_\sharp,G}(A^{G_\sharp}_{unip;G,\omega,S}(V)),$$

ce qui prouve la proposition 4.3.

Il reste à prouver (7). Puisque $G_\flat$, resp. $M_\flat$, est le produit de Z et de $G_\sharp$, resp. $M_\sharp$, on a

$$\tau'(G_\sharp)^{-1}\tau'(M_\sharp)=\tau'(G_\flat)^{-1}\tau'(M_\flat).$$

On peut aussi bien démontrer l'égalité

$$(8)\qquad \tau'(G)^{-1}\tau'(M)=\tau'(G_\flat)^{-1}\tau'(M_\flat).$$

Rappelons que l'on a identifié $\mathfrak{A}_G$ à $Hom(X^*(G)^{\Gamma_F},\mathbb{R})$ et que l'on a défini le réseau $\mathfrak{A}_{G,\mathbb{Z}}=Hom(X^*(G)^{\Gamma_F},\mathbb{Z})$. On a une injection $X^*(G)^{\Gamma_F}\to X^*(M)^{\Gamma_F}$. Son conoyau est sans torsion. En effet, si on introduit un tore maximal $T \subset M$, ce conoyau est l'image de l'homomorphisme naturel $X^*(M)^{\Gamma_F} \to X^*(T_{sc})^{\Gamma_F}$, où, comme toujours, T_{sc} est l'image réciproque de T dans G_{SC}. De l'injection précédente se déduisent des homomorphismes $\mathfrak{A}_M \to \mathfrak{A}_G$ et $\mathfrak{A}_{M,\mathbb{Z}} \to \mathfrak{A}_{G,\mathbb{Z}}$. Le premier est trivialement surjectif. Le second est lui aussi surjectif, parce que le conoyau de l'injection $X^*(G)^{\Gamma_F} \to X^*(M)^{\Gamma_F}$ est sans torsion. En notant $\mathfrak{A}_M^G$ et $\mathfrak{A}_{M,\mathbb{Z}}^G$ les noyaux de ces homomorphismes, on obtient une suite exacte

$$0 \to \mathfrak{A}_M^G/\mathfrak{A}_{M,\mathbb{Z}}^G \to \mathfrak{A}_M/\mathfrak{A}_{M,\mathbb{Z}} \to \mathfrak{A}_G/\mathfrak{A}_{G,\mathbb{Z}} \to 0$$

Donc

$$covol(\mathfrak{A}_{M,\mathbb{Z}})^{-1}covol(\mathfrak{A}_{G,\mathbb{Z}}) = covol(\mathfrak{A}_{M,\mathbb{Z}}^G)^{-1}.$$

En se rappelant la définition de 4.1, on obtient

$$\tau'(G)^{-1}\tau'(M) = \tau(G)^{-1}\tau(M)covol(\mathfrak{A}_{M,\mathbb{Z}}^G)^{-1}.$$

On a démontré en [VI] 6.1 l'égalité $ker^1(F, Z(\hat{G})) = ker^1(F, Z(\hat{M}))$. L'égalité précédente se récrit donc

$$(9) \qquad \tau'(G)^{-1}\tau'(M) = |\pi_0(Z(\hat{G})^{\Gamma_F})|^{-1}|\pi_0(Z(\hat{M})^{\Gamma_F})|covol(\mathfrak{A}_{M,\mathbb{Z}}^G)^{-1}.$$

On a bien sûr une relation analogue pour $G_\flat$ et $M_\flat$. On a un diagramme commutatif

$$(10) \qquad \begin{array}{ccc} X^*(G)^{\Gamma_F} & \to & X^*(M)^{\Gamma_F} \\ \downarrow & & \downarrow \\ X^*(G_\flat)^{\Gamma_F} & \to & X^*(M_\flat)^{\Gamma_F} \end{array}$$

dont les flèches sont injectives. Les flèches verticales sont de conoyaux finis. On en déduit un diagramme d'isomorphismes

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \to & \mathfrak{A}_M^G & \to & \mathfrak{A}_M & \to & \mathfrak{A}_G & \to & 1 \\ & & \| & & \| & & \| & & \\ 1 & \to & \mathfrak{A}_{M_\flat}^{G_\flat} & \to & \mathfrak{A}_{M_\flat} & \to & \mathfrak{A}_{G_\flat} & \to & 1 \end{array}$$

et un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \to & \mathfrak{A}_{M,\mathbb{Z}}^G & \to & \mathfrak{A}_{M,\mathbb{Z}} & \to & \mathfrak{A}_{G,\mathbb{Z}} & \to & 1 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ 1 & \to & \mathfrak{A}_{M_\flat,\mathbb{Z}}^{G_\flat} & \to & \mathfrak{A}_{M_\flat,\mathbb{Z}} & \to & \mathfrak{A}_{G_\flat,\mathbb{Z}} & \to & 1 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ & & 1 & & 1 & & 1 & & \end{array}$$

Les suites ci-dessus sont exactes. On les complète en notant B_M^G, B_M et B_G les conoyaux des suites verticales. Ils sont finis et on a la suite exacte

$$1 \to B_M^G \to B_M \to B_G \to 1.$$

On a normalisé les mesures de sorte que l'isomorphisme $\mathfrak{A}_{M_\flat}^{G_\flat} \to \mathfrak{A}_M^G$ les conserve. On en déduit

$$covol(\mathfrak{A}_{M_\flat,\mathbb{Z}}^{G_\flat}) = covol(\mathfrak{A}_{M,\mathbb{Z}}^G)|B_M^G|,$$

d'où aussi

$$(11) \qquad covol(\mathfrak{A}_{M_\flat,\mathbb{Z}}^{G_\flat}) = covol(\mathfrak{A}_{M,\mathbb{Z}}^G)|B_G|^{-1}|B_M|.$$

On sait que $X^*(G) \simeq X_*(Z(\hat{G})^0)$. Dualement au diagramme (10), on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} Z(\hat{G})^{\Gamma_F,0} & \to & Z(\hat{M})^{\Gamma_F,0} \\ \downarrow & & \downarrow \\ Z(\hat{G}_\flat)^{\Gamma_F,0} & \to & Z(\hat{M}_\flat)^{\Gamma_F,0} \end{array}$$

Les flèches horizontales sont injectives. Les flèches verticales sont surjectives. On note leurs noyaux $\hat{B}_G$ et $\hat{B}_M$. Remarquons que, puisque $\hat{G}$ et $\hat{G}_\flat$ ont même groupe adjoint, l'image réciproque par la deuxième flèche verticale de $Z(\hat{M}_\flat)^{\Gamma_F,0} \cap Z(\hat{G}_\flat)^{\Gamma_F}$ n'est autre que $Z(\hat{M})^{\Gamma_F,0} \cap Z(\hat{G})^{\Gamma_F}$. Remarquons aussi que le quotient

$$Z(\hat{G})^{\Gamma_F,0} \backslash (Z(\hat{M})^{\Gamma_F,0} \cap Z(\hat{G})^{\Gamma_F})$$

n'est autre que le groupe des composantes connexes $\pi_0(Z(\hat{M})^{\Gamma_F,0} \cap Z(\hat{G})^{\Gamma_F})$. On obtient alors un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc} & & 1 & & 1 & & 1 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 1 & \to & \hat{B}_G & \to & \hat{B}_M & \to & \hat{B}_M^G & \to & 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 1 & \to & Z(\hat{G})^{\Gamma_F,0} & \to & Z(\hat{M})^{\Gamma_F,0} \cap Z(\hat{G})^{\Gamma_F} & \to & \pi_0(Z(\hat{M})^{\Gamma_F,0} \cap Z(\hat{G})^{\Gamma_F}) & \to & 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 1 & \to & Z(\hat{G}_\flat)^{\Gamma_F,0} & \to & Z(\hat{M}_\flat)^{\Gamma_F,0} \cap Z(\hat{G}_\flat)^{\Gamma_F} & \to & \pi_0(Z(\hat{M}_\flat)^{\Gamma_F,0} \cap Z(\hat{G}_\flat)^{\Gamma_F}) & \to & 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & 1 & & 1 & & 1 & & \end{array}$$

où $\hat{B}_M^G$ est défini comme le noyau de la dernière suite verticale. Les lignes verticales sont exactes. Les deux dernières lignes horizontales aussi. Donc la première ligne horizontale aussi.

Revenons à la définition de B_G, qui est le conoyau de l'homomrophisme $\mathfrak{A}_{G_\flat,\mathbb{Z}} \to \mathfrak{A}_{G,\mathbb{Z}}$. Par dualité, $|B_G|$ est aussi le nombre d'éléments du conoyau de l'homomorphisme $X^*(G)^{\Gamma_F} \to X^*(G_\flat)^{\Gamma_F}$. En vertu de l'isomorphisme $X^*(G) \simeq X_*(Z(\hat{G})^0)$ et de l'isomorphisme analogue pour $G_\flat$, on voit que B_G a même nombre d'éléments que $\hat{B}_G$. De même, B_M a même nombre d'éléments que $\hat{B}_M$. D'après le diagramme ci-dessus, on obtient

$$|B_G|^{-1}|B_M| = |\hat{B}_M^G| = |\pi_0(Z(\hat{M}_\flat)^{\Gamma_F,0} \cap Z(\hat{G}_\flat)^{\Gamma_F})|^{-1}|\pi_0(Z(\hat{M})^{\Gamma_F,0} \cap Z(\hat{G})^{\Gamma_F})|.$$

On a la suite exacte

$$1 \to \pi_0(Z(\hat{M})^{\Gamma_F,0} \cap Z(\hat{G})^{\Gamma_F}) \to \pi_0(Z(\hat{M})^{\Gamma_F}) \to \pi_0(Z(\hat{G})^{\Gamma_F}) \to 1.$$

D'où l'égalité

$$|B_G||B_M|^{-1} = |\pi_0(Z(\hat{M}_\flat)^{\Gamma_F})|^{-1}|\pi_0(Z(\hat{G}_\flat)^{\Gamma_F})||\pi_0(Z(\hat{M})^{\Gamma_F})||\pi_0(Z(\hat{G})^{\Gamma_F})|^{-1}.$$

En insérant cette égalité dans (11) et en utilisant (9) ainsi que la relation analogue pour $G_\flat$, on obtient (8). Cela achève la démonstration. $\square$

4.5 Données endoscopiques et revêtement

On a étudié cette question dans le cas local en [III] 3.6 et 3.7 et en [V] 3.3. On se contente ici de reprendre brièvement les constructions dans notre cadre global.

On suppose G quasi-déployé et $\mathbf{a}=1$. Comme on l'a vu en [III] 3.5, l'homomorphisme $\iota_{G_\sharp,G}:C_c^\infty(\Omega_V)\to C_c^\infty(\Omega_{\sharp,V})$ de 4.3 se quotiente en un homomorphisme $\iota_{G_\sharp,G}:SI(\Omega_V)\to SI(\Omega_{\sharp,V})$. Il est plus commode de noter cet homomorphisme $\iota_{G_\sharp,G}\,:\,SI(G(F_V))\to SI(G_\sharp(F_V))$, étant entendu qu'il n'est défini que sur les fonctions à support assez voisin de l'origine. Dualement, on a un homomorphisme $D^{st}_{g\acute{e}om}(G_\sharp(F_V))\to D^{st}_{g\acute{e}om}(G(F_V))$, défini sur les distributions à support voisin de l'origine. Il se restreint en un homomorphisme

$$\iota^*_{G_\sharp,G}:D^{st}_{unip}(G_\sharp(F_V))\to D^{st}_{unip}(G(F_V)).$$

C'est aussi la restriction à $D^{st}_{unip}(G_\sharp(F_V))$ de l'homomorphisme $\iota^*_{G_\sharp,G}$ défini en 4.3.

Dualement à la suite exacte

$$1\to\Xi_\flat\to Z\times G_\sharp\to G\to 1,$$

on a une suite exacte

$$1\to\hat{\Xi}_\flat\to\hat{G}\to\hat{Z}\times\hat{G}_\sharp\to 1,$$

où $\hat{\Xi}_\flat$ est un sous-groupe fini central de $\hat{G}$. Soit $\mathbf{G}'=(G',\mathcal{G}',s)$ une donnée endoscopique de G. L'élément $s\in\hat{G}$ s'envoie sur un élément $(z,s_\sharp)\in\hat{Z}\times\hat{G}_\sharp$. En notant $\hat{G}'_\sharp$ la composante neutre de $Z_{G_\sharp}(s_\sharp)$, on a la suite exacte

$$(1)\qquad 1\to\hat{\Xi}_\flat\to\hat{G}'\to\hat{Z}\times\hat{G}'_\sharp\to 1.$$

Le groupe $\mathcal{G}'/\hat{\Xi}_\flat$ contient $\hat{Z}$ donc est de la forme $\hat{Z}\times\mathcal{G}'_\sharp$, où $\mathcal{G}'_\sharp$ est un sous-groupe de ${}^LG_\sharp$. Ce groupe définit une action galoisienne sur $\hat{G}'_\sharp$. On introduit un groupe quasi-déployé $G'_\sharp$ sur F dont $\hat{G}'_\sharp$ soit le groupe dual. Alors $\mathbf{G}'_\sharp=(G'_\sharp,\mathcal{G}'_\sharp,s_\sharp)$ est une donnée endoscopique de $G_\sharp$. En [I] 2.7, on a associé à une telle donnée un caractère de $G_{\sharp,AD}(\mathbb{A}_F)$ noté $\omega_\sharp$.

Remarque. Dans cette référence, le corps de base était local mais la construction vaut aussi bien sur notre corps de nombres. D'autre part, l'indice $\sharp$ n'avait pas de rapport avec le présent indice mais on peut aussi bien conserver ici cette notation.

Rappelons que $G_{\sharp,AD}=G_{AD}$. Pour la donnée que l'on vient de construire, on a

(2) la restriction de $\omega_\sharp$ à l'image de $G(\mathbb{A}_F)$ dans $G_{AD}(\mathbb{A}_F)$ est triviale.

Inversement, soit $\mathbf{G}'_\sharp=(G'_\sharp,\mathcal{G}'_\sharp,s_\sharp)$ une donnée endoscopique de $G_\sharp$. On fixe une image réciproque $s\in\hat{G}$ de $(1,s_\sharp)\in\hat{Z}\times\hat{G}_\sharp$. On note $\mathcal{G}'$ l'image réciproque de $\hat{Z}\times\mathcal{G}'_\sharp$ dans ${}^LG$. Ce groupe agit sur $\hat{G}_s$ et munit ce groupe d'une action galoisienne. On introduit un groupe G' quasi-déployé sur F dont $\hat{G}_s$ est le groupe dual. Le triplet $(G',\mathcal{G}',s)$ est une donnée endoscopique pour G muni d'un certain cocycle $\mathbf{a}$. C'est une donnée endoscopique pour G, c'est-à-dire ce cocycle est trivial, si et seulement si la condition (2) est vérifiée.

Ces constructions définissent des bijections inverses l'une de l'autre entre les classes d'équivalence de données endoscopiques pour G et les classes d'équivalence de données endoscopiques pour $G_\sharp$ vérifiant (2). Ces bijections préservent l'ellipticité et la non-ramification hors de V. On a fixé des ensembles de représentants $\mathcal{E}(G,V)$ et $\mathcal{E}(G_\sharp,V)$ des classes d'équivalence de données endoscopiques pour G et $G_\sharp$ qui sont elliptiques et non ramifiées hors de V. On note $\mathcal{E}_G(G_\sharp,V)$ le sous-ensemble des éléments de $\mathcal{E}(G_\sharp,V)$ qui vérifient la condition (2). Les ensembles $\mathcal{E}(G,V)$ et $\mathcal{E}_G(G_\sharp,V)$ sont en bijection.

Considérons une donnée $\mathbf{G}' = (G', \mathcal{G}', s)$ et la donnée $\mathbf{G}'_\sharp = (G'_\sharp, \mathcal{G}'_\sharp, s_\sharp)$ construite ci-dessus. Dualement à la suite (1), on a la suite exacte

$$1 \to \Xi_\flat \to Z \times G'_\sharp \stackrel{q_\sharp}{\to} G' \to 1.$$

Les groupes G' et $G'_\sharp$ sont donc dans la même situation que les groupes G et $G_\sharp$. Fixons des données auxiliaires G'_1, C_1, $\hat{\xi}_1$ pour $\mathbf{G}'$. Notons $G'_{\sharp,1}$ le produit fibré de G'_1 et $G'_\sharp$ au-dessus de G'. Le groupe dual $\hat{G}'_{\sharp,1}$ s'identifie à $\hat{G}'_1/\hat{\xi}_1(\hat{Z}_\flat)$, où $\hat{Z}_\flat$ est l'image réciproque de $\hat{Z}$ dans $\hat{G}$. Puisque $\mathcal{G}'_\sharp$ est aussi isomorphe à $\mathcal{G}'/\hat{Z}_\flat$, le plongement $\hat{\xi}_1$ se quotiente en un plongement $\hat{\xi}_{\sharp,1} : \mathcal{G}'_\sharp \to {}^L G'_{\sharp,1}$. Les données $G'_{\sharp,1}$, C_1, $\hat{\xi}_{\sharp,1}$ sont des données auxiliaires pour $\mathbf{G}'_\sharp$. Supposons les données endoscopiques non ramifiées hors de V, ainsi que les données auxiliaires pour $\mathbf{G}'$. Alors les données auxiliaires pour $\mathbf{G}'_\sharp$ sont elles-aussi non ramifiées hors de V. On a vu en [VI] 3.6 que le choix des groupes K_v pour $v \notin V$ permettait de définir un facteur de transfert canonique $\Delta_{1,V}$ sur $G'_1(F_V) \times G(F_V)$ (notons que, dans le cas non tordu, l'hypothèse **Hyp** de cette référence est toujours vérifiée). On a relevé les K_v en des sous-groupes $K_{\sharp,v}$. Ils déterminent de même un facteur de transfert canonique $\Delta_{\sharp,1,V}$ sur $G'_{\sharp,1}(F_V) \times G_\sharp(F_V)$. On vérifie que si $(\delta_{\sharp,1}, \gamma_\sharp) \in G'_{\sharp,1}(F_V) \times G_\sharp(F_V)$ est un couple d'éléments semi-simples $G_\sharp$-fortement réguliers qui se correspondent, on a l'égalité

$$\Delta_{\sharp,1,V}(\delta_{\sharp,1}, \gamma_\sharp) = \Delta_{1,V}(\delta_1, \gamma),$$

où δ_1 et γ sont les projections naturelles de $\delta_{\sharp,1}$ et $\gamma_\sharp$.

Remarque. Il se peut que les éléments δ_1 et γ se correspondent alors que $\delta_{\sharp,1}$ et $\gamma_\sharp$ ne se correspondent pas. L'égalité ci-dessus devient fausse, le membre de gauche étant nul alors que celui de droite ne l'est pas.

On peut adapter les constructions de 4.3 et définir un homomorphisme

$$\iota_{G'_{\sharp,1}, G'_1} : SI_{\lambda_1}(G'_1(F_V)) \to SI_{\lambda_1}(G'_{\sharp,1}(F_V))$$

bien défini sur les fonctions dont le support dans $G'(F_V)$ est voisin de l'origine. Le diagramme suivant est commutatif

$$(3) \qquad \begin{array}{ccc} I(G(F_V)) & \stackrel{transfert}{\to} & SI_{\lambda_1}(G'_1(F_V)) \\ \iota_{G_\sharp,G} \downarrow & & \downarrow \iota_{G'_{\sharp,1},G'_1} \\ I(G_\sharp(F_V)) & \stackrel{transfert}{\to} & SI_{\lambda_1}(G'_{\sharp,1}(F_V)) \end{array}$$

Supposons que nos données endoscopiques soient elliptiques. Les espaces $\mathfrak{A}_G$ et $\mathfrak{A}_{G'}$ sont isomorphes et, conformément aux conventions de [VI], on suppose que l'isomorphisme préserve les mesures. De même pour les espaces $\mathfrak{A}_{G_\sharp}$ et $\mathfrak{A}_{G'_\sharp}$. On fixe une mesure sur $\mathfrak{A}_{C_1}$. En utilisant les suites exactes habituelles, des mesures déjà fixées se déduisent des mesures sur $\mathfrak{A}_{G'_1}$ et $\mathfrak{A}_{G'_{\sharp,1}}$. Avec ces normalisations, montrons que l'on a l'égalité

$$(4) \qquad i(G, G')\tau'(G)^{-1}\tau'(G'_1) = i(G_\sharp, G'_\sharp)\tau'(G_\sharp)^{-1}\tau'(G'_{\sharp,1}).$$

Preuve. Rappelons (cf. [VI] 5.1) que, dans notre situation quasi-déployée et sans torsion, on a simplement

$$i(G, G') = |Out(\mathbf{G}')|^{-1}\tau(G)\tau(G')^{-1}.$$

D'autre part, le lemme 4.2 nous dit que $\tau'(G'_1) = \tau'(G')\tau'(C_1)$. Le membre de gauche de (4) est donc égal à

$$|Out(\mathbf{G}')|^{-1}covol(\mathfrak{A}_{G,\mathbb{Z}})covol(\mathfrak{A}_{G',\mathbb{Z}})^{-1}\tau'(C_1).$$

Parce que $\mathbf{G}'$ est elliptique, on a les isomorphismes

$$X^*(G)^{\Gamma_F} \simeq X_*(Z(\hat{G})^{\Gamma_F,0}) = X_*(Z(\hat{G}')^{\Gamma_F,0}) \simeq X^*(G')^{\Gamma_F}.$$

Il en résulte que $covol(\mathfrak{A}_{G,\mathbb{Z}}) = covol(\mathfrak{A}_{G',\mathbb{Z}})$. Donc le membre de gauche de (4) est égal à $|Out(\mathbf{G}')|^{-1}\tau'(C_1)$. On a une formule analogue pour le membre de droite. On vérifie immédiatement que les groupes $Out(\mathbf{G}')$ et $Out(\mathbf{G}'_\sharp)$ sont isomorphes. L'égalité (4) s'ensuit. $\square$

4.6 Coefficients stables et revêtement

On suppose encore G quasi-déployé et $\mathbf{a} = 1$.

Proposition. *La distribution $\tau'(G)^{-1}SA^G_{unip}(V)$ est l'image par l'homomorphisme $\iota^*_{G_\sharp,G}$ de $\tau'(G_\sharp)^{-1}SA^{G_\sharp}_{unip}(V)$.*

Preuve. Soit $f \in C_c^\infty(G(F_V))$. On a par définition

$$(1) \qquad \tau'(G)^{-1}I^G(SA^G_{unip}(V), f) = \tau'(G)^{-1}I^G(A^G_{unip}(V), f)$$
$$- \sum_{\mathbf{G}' \in \mathcal{E}(G,V), G' \neq G} \tau'(G)^{-1}i(G, G')S^{\mathbf{G}'}(SA^{\mathbf{G}'}_{unip}(V), f^{\mathbf{G}'}).$$

Fixons $\mathbf{G}' = (G', \mathcal{G}', s) \in \mathcal{E}(G, V)$ avec $G' \neq G$. Introduisons des données auxiliaires pour cette donnée, non ramifiées hors de V. Introduisons aussi la donnée $\mathbf{G}'_\sharp$ comme dans le paragraphe précédent. On utilise les notations de ce paragraphe. On identifie $f^{\mathbf{G}'}$ à un élément $f_1 \in SI_{\lambda_1}(G'_1(F_V))$. On a

$$S^{\mathbf{G}'}(SA^{\mathbf{G}'}_{unip}(V), f^{\mathbf{G}'}) = S^{G'_1}_{\lambda_1}(SA^{G'_1}_{unip,\lambda_1}(V), f_1).$$

On peut appliquer la proposition par récurrence à G' puisque $G' \neq G$. On travaille ici avec des distributions qui se transforment selon le caractère λ_1 de $C_1(F_V)$ mais la dernière égalité du paragraphe 1.11 permet d'adapter la proposition à ce cas. On a donc

$$SA^{G'_1}_{unip,\lambda_1}(V) = \tau'(G'_1)\tau'(G'_{1,\sharp})^{-1}\iota^*_{G'_{\sharp,1},G'_1}(SA^{G'_{\sharp,1}}_{unip,\lambda_1}(V)).$$

D'où

$$S^{G'_1}_{\lambda_1}(SA^{G'_1}_{unip,\lambda_1}(V), f_1) = \tau'(G'_1)\tau'(G'_{1,\sharp})^{-1}S^{G'_{\sharp,1}}_{\lambda_1}(SA^{G'_{\sharp,1}}_{unip,\lambda_1}(V), f_{\sharp,1}),$$

où $f_{\sharp,1} = \iota_{G'_{\sharp,1},G'_1}(f_1)$. En utilisant ces formules et 4.5(4), on transforme la somme en $\mathbf{G}'$ de l'expression (1) en

$$(2) \qquad \sum_{\mathbf{G}'_\sharp \in \mathcal{E}_G(G_\sharp,V)} \tau'(G_\sharp)^{-1}i(G_\sharp, G'_\sharp)S^{G'_{\sharp,1}}_{\lambda_1}(SA^{G'_{\sharp,1}}_{unip,\lambda_1}(V), f_{\sharp,1}).$$

Posons $f_\sharp = \iota_{G_\sharp,G}(f)$. Remarquons que, d'après 4.5(3), les fonctions $f_{\sharp,1}$ intervenant peuvent aussi se définir comme le transfert de $f_\sharp$ à $G'_{\sharp,1}(F_V)$. Le terme que l'on somme ne fait alors plus référence à G. En particulier, on peut le définir pour toute donnée $\mathbf{G}'_\sharp \in \mathcal{E}(G_\sharp, V)$ et pas seulement pour celles qui proviennent d'une donnée endoscopique de G. D'autre part, les facteurs de transfert utilisés pour définir ces fonctions $f_{\sharp,1}$ dépendent des compacts K_v pour $v \notin V$. Notons-les plus précisément $f_{\sharp,1}[K^V]$. On sait par contre que les distributions $SA^{G'_{\sharp,1}}_{unip,\lambda_1}(V)$ ne dépendent pas des compacts. Soit S un ensemble fini de places de F contenant V. Soit $\mathcal{U}_S^V$ un ensemble de représentants du quotient $q_\flat(G_\flat(F_S^V))\backslash G(F_S^V)$. Pour $u \in \mathcal{U}_S^V$, on définit pour $v \in S - V$ le groupe ${}^uK_v = uK_vu^{-1}$, qui se relève en le compact ${}^uK_{\sharp,v} = uK_{\sharp,v}u^{-1}$ de $G_\sharp(F_v)$. On pose ${}^uK^V = (\prod_{v\in S-V} {}^uK_v)(\prod_{v\notin S} K_v)$. Soit $\mathbf{G}'_\sharp \in \mathcal{E}(G_\sharp, V)$. Montrons que

(3) si S est assez grand, on a l'égalité

$$|\mathcal{U}_S^V|^{-1} \sum_{u\in\mathcal{U}_S^V} S^{G'_{\sharp,1}}_{\lambda_1}(SA^{G'_{\sharp,1}}_{unip,\lambda_1}(V), f_{\sharp,1}[{}^uK^V]) =$$

$$\begin{cases} S^{G'_{\sharp,1}}_{\lambda_1}(SA^{G'_{\sharp,1}}_{unip,\lambda_1}(V), f_{\sharp,1}[K^V]), & \text{si } \mathbf{G}'_\sharp \in \mathcal{E}_G(G_\sharp, V), \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

En 4.5, on a rappelé l'existence d'un caractère $\omega_\sharp$ de $G_{AD}(\mathbb{A}_F)$ associé à $\mathbf{G}'_\sharp$. La fonction $f_\sharp$ est par construction invariante par l'action de $G(F_V)$. Il résulte de cela et de la définition du caractère $\omega_\sharp$ que tous les transferts $f_{\sharp,1}[{}^uK^V]$ sont nuls sauf si $\omega_\sharp$ est trivial sur $G(F_V)$. Si cette condition n'est pas vérifiée, la relation (2) est donc évidente. Supposons que $\omega_\sharp$ est trivial sur $G(F_V)$. Pour $v \in S - V$, notons ${}^u\Delta_{\sharp,1,v}$ le facteur de transfert local associé à ${}^uK_{\sharp,v}$. Ce n'est autre que $(\delta_{\sharp,1}, \gamma_\sharp) \mapsto \Delta_{\sharp,v}(\delta_{\sharp,1}, u^{-1}\gamma_\sharp u)$, où $\Delta_{\sharp,v}$ est associé à $K_{\sharp,v}$. On a simplement $\Delta_{\sharp,v}(\delta_{\sharp,1}, u^{-1}\gamma_\sharp u) = \omega_{\sharp,v}(u)\Delta_{\sharp,v}(\delta_{\sharp,1}, \gamma_\sharp)$. Donc ${}^u\Delta_{\sharp,1,v} = \omega_{\sharp,v}(u)\Delta_{\sharp,1,v}$. Ces facteurs locaux en $v \in S - V$ sont les seules données qui changent quand on change de compacts. En se rappelant la définition des facteurs de transfert canoniques, on voit alors que $f_{\sharp,1}[{}^uK^V] = \omega_\sharp(u)^{-1} f_{\sharp,1}[K^V]$. La somme de (3) vaut donc

$$S^{G'_{\sharp,1}}_{\lambda_1}(SA^{G'_{\sharp,1}}_{unip,\lambda_1}(V), f_{\sharp,1}[K^V])|\mathcal{U}_S^V|^{-1} \sum_{u\in\mathcal{U}_S^V} \omega_\sharp(u)^{-1}.$$

C'est-à-dire qu'elle vaut $S^{G'_{\sharp,1}}_{\lambda_1}(SA^{G'_{\sharp,1}}_{unip,\lambda_1}(V), f_{\sharp,1}[K^V])$ si $\omega_\sharp$ est trivial sur $G(F_S^V)$ et 0 sinon. Le caractère $\omega_\sharp$ est automorphe et, parce que $\mathbf{G}'_\sharp$ est non ramifié hors de V, il est trivial sur K^V. Choisissons S tel que $G(\mathbb{A}_F) = G(F)(G(F_S) \times K^S)$. Parce que l'on a supposé que $\omega_\sharp$ était trivial sur $G(F_V)$, la condition que ce caractère soit trivial sur $G(F_S^V)$ équivaut alors à ce qu'il soit trivial sur tout $G(\mathbb{A}_F)$. C'est la condition 4.5(2), dont on a vu qu'elle équivalait à l'appartenance de $\mathbf{G}'_\sharp$ à $\mathcal{E}_G(G_\sharp, V)$. Cela démontre (3).

On fixe S assez grand. Grâce à (3), l'expression (2) se récrit

$$\tau'(G_\sharp)^{-1}|\mathcal{U}_S^V|^{-1} \sum_{u\in\mathcal{U}_S^V} \sum_{\mathbf{G}'_\sharp\in\mathcal{E}(G_\sharp,V)} i(G_\sharp, G'_\sharp) S^{G'_{\sharp,1}}_{\lambda_1}(SA^{G'_{\sharp,1}}_{unip,\lambda_1}(V), f_{\sharp,1}[{}^uK^V]).$$

La proposition 4.3 nous dit que le premier terme du membre de droite de (1) est égal à

$$\tau'(G_\sharp)^{-1}|\mathcal{U}_S^V|^{-1} \sum_{u\in\mathcal{U}_S^V} I^{G_\sharp}(A^{G_\sharp}_{unip}(V, {}^uK_\sharp^V), f_\sharp).$$

Ainsi le membre de droite de la formule (1) est le produit de $\tau'(G_\sharp)^{-1}|\mathcal{U}_S^V|^{-1}$ et de la somme en $u \in \mathcal{U}_S^V$ de l'expression

$$I^{G_\sharp}(A^{G_\sharp}_{unip}(V, {}^uK^V_\sharp), f_\sharp) - \sum_{\mathbf{G}'_\sharp \in \mathcal{E}(G_\sharp, V)} i(G_\sharp, G'_\sharp) S^{G'_{\sharp,1}}_{\lambda_1}(SA^{G'_{\sharp,1}}_{unip,\lambda_1}(V), f_{\sharp,1}[{}^uK^V]).$$

Celle-ci est par définition égale à $I^{G_\sharp}(SA^{G_\sharp}_{unip}(V), f_\sharp)$. La référence aux compacts disparaît puisqu'on sait que la distribution $SA^{G_\sharp}_{unip}(V)$ n'en dépend pas. Ce terme étant indépendant de u, l'égalité (1) devient simplement

$$\tau'(G) I^G(SA^G_{unip}(V), f) = \tau'(G_\sharp)^{-1} I^{G_\sharp}(SA^{G_\sharp}_{unip}(V), f_\sharp).$$

Dire que cette égalité est vérifiée pour tout f équivaut à l'assertion de l'énoncé. $\square$

5 Descente

5.1 Une première transformation

On commence la preuve du théorème 3.3. Le triplet $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$ est quelconque. On fixe $\mathcal{X} \in \mathbf{Stab}(\tilde{G}(F))$ qui n'appartient pas à $\mathbf{Stab}_{excep}(\tilde{G}(F))$. On fixe un ensemble fini V de places de F contenant $S(\mathcal{X})$. En vertu du lemme 3.7, on impose de plus

(1) V contient $S(\mathcal{X}, \tilde{K})$;

(2) $\mathcal{X}$ est elliptique ;

(3) pour toute place $v \in Val(F)$, l'image de $\mathcal{X}$ dans $\mathbf{Stab}(\tilde{G}(F_v))$ appartient à l'image de l'application $\chi^{\tilde{G}_v}$;

(4) les restrictions de ω à $Z(G; \mathbb{A}_F)^\theta$ et $Z(\bar{G}; \mathbb{A}_F)$ sont triviales.

On pose

$$\underline{A}^{G,\mathcal{E}}(V, \mathcal{X}, \omega) = \sum_{\mathbf{G}' \in \mathcal{E}(\tilde{G}, \mathbf{a}, V)} \sum_{\mathcal{X}' \in \mathbf{Stab}(\tilde{G}'(F)); \mathcal{X}' \mapsto \mathcal{X}} i(\tilde{G}, \tilde{G}') transfert(\underline{SA}^{\mathbf{G}'}(V, \mathcal{X}')).$$

Il s'agit de démontrer l'égalité

$$A^G(V, \mathcal{X}, \omega) = \underline{A}^{G,\mathcal{E}}(V, \mathcal{X}, \omega).$$

On fixe une paire de Borel épinglée $\hat{\mathcal{E}} = (\hat{B}, \hat{T}, (\hat{E}_\alpha)_{\alpha \in \Delta})$ de $\hat{G}$ et on définit l'automorphisme $\hat{\theta}$ ainsi que l'action galoisienne relativement à cette paire, cf. [I] 1.2. Notons $E_{\hat{T}}(\tilde{G}, \mathbf{a}, V)$ l'ensemble des données endoscopiques de $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$ qui sont de la forme $\mathbf{G}' = (G', \mathcal{G}', s\hat{\theta})$ avec $s \in \hat{T}$ et qui sont elliptiques, relevantes et non ramifiées hors de V. Pour deux données $\mathbf{G}'_1 = (G'_1, \mathcal{G}'_1, s_1\hat{\theta})$ et $\mathbf{G}'_2 = (G'_2, \mathcal{G}'_2, s_2\hat{\theta})$ dans cet ensemble, disons qu'elles sont $\hat{T}$-équivalentes s'il existe $x \in \hat{T}$ tel que $x\mathcal{G}'_1 x^{-1} = \mathcal{G}'_2$ et $xs_1\hat{\theta}(x)^{-1} \in s_2 Z(\hat{G})$. Fixons un ensemble de représentants $\mathcal{E}_{\hat{T}}(\tilde{G}, \mathbf{a}, V)$ des classes de $\hat{T}$-équivalence dans $E_{\hat{T}}(\tilde{G}, \mathbf{a}, V)$. Toute donnée endoscopique elliptique, relevante et non ramifiée hors de V est équivalente à une donnée appartenant à $E_{\hat{T}}(\tilde{G}, \mathbf{a}, V)$. Il y a donc une application surjective

$$\mathcal{E}_{\hat{T}}(\tilde{G}, \mathbf{a}, V) \to \mathcal{E}(\tilde{G}, \mathbf{a}, V).$$

Soit $\mathbf{G}' = (G', \mathcal{G}', s\hat{\theta}) \in \mathcal{E}_{\hat{T}}(\tilde{G}, \mathbf{a}, V)$. La fibre de cette application au-dessus de l'image de $\mathbf{G}'$ est formé des $(G'_1, \mathcal{G}'_1, s_1\hat{\theta})$, à $\hat{T}$-équivalence près, pour lesquels il existe $x \in \hat{G}$ de sorte que $x\mathcal{G}'x^{-1} = \mathcal{G}'_1$ et $xs\hat{\theta}(x)^{-1} \in s_1Z(\hat{G})$. Puisque $\hat{G}'$ et $\hat{G}'_1$ contiennent $\hat{T}^{\hat{\theta},0}$, on peut supposer que x normalise $\hat{T}^{\hat{\theta},0}$, donc aussi $\hat{T}$. La condition $xs\hat{\theta}(x)^{-1} \in s_1Z(\hat{G})$ implique alors que l'image de x dans W est fixe par $\hat{\theta}$. Inversement, un élément $x \in Norm_{\hat{G}}(\hat{T})$ dont l'image dans W est fixe par $\hat{\theta}$ donne naissance à une donnée $(G'_1, \mathcal{G}'_1, s_1\hat{\theta})$. Cette donnée est $\hat{T}$-équivalente à $\mathbf{G}'$ si et seulement si $x \in \hat{T}(Aut(\mathbf{G}') \cap Norm_{\hat{G}}(\hat{T}))$. On a une suite exacte

$$1 \to W^{G'} \to \hat{T}\backslash\hat{T}(Aut(\mathbf{G}') \cap Norm_{\hat{G}}(\hat{T})) \to Out(\mathbf{G}') \to 1$$

Ainsi la fibre de l'application précédente au-dessus de l'image de $\mathbf{G}'$ a pour nombre d'éléments $|W^\theta||Out(\mathbf{G}')|^{-1}|W^{G'}|^{-1}$. On peut donc récrire

$$\underline{A}^{G,\mathcal{E}}(V, \mathcal{X}, \omega) = |W^\theta|^{-1} \sum_{\mathbf{G}' \in \mathcal{E}_{\hat{T}}(G, \mathbf{a}, V)} |Out(\mathbf{G}')||W^{G'}|$$

$$i(\tilde{G}, \tilde{G}') \sum_{\mathcal{X}' \in \mathbf{Stab}(G'(F)); \mathcal{X}' \mapsto \mathcal{X}} transfert(\underline{SA}^{\mathbf{G}'}(V, \mathcal{X}')).$$

Soit $\mathbf{G}' = (G', \mathcal{G}', s\hat{\theta}) \in \mathcal{E}_{\hat{T}}(G, \mathbf{a}, V)$. On fixe une paire de Borel épinglée de $\hat{G}'$ dont la paire de Borel sous-jacente $(\hat{B}', \hat{T}')$ est $(\hat{B} \cap \hat{G}', \hat{T}^{\hat{\theta},0})$. En utilisant les notations de 1.7, cela définit l'application $\xi : T^* \to T'^*$ et une application $Stab(\tilde{G}'(F)) \to Stab(\tilde{G}(F))$ que l'on note simplement $(\mu', \omega_{\bar{G}'}) \mapsto (\mu, \omega_{\bar{G}})$. Notons ici $p_{\tilde{G}} : Stab(\tilde{G}(F)) \to \mathbf{Stab}(\tilde{G}(F))$ l'application naturelle.

Remarque. Les hypothèses que $\mathbf{G}'$ est relevante et non ramifiée hors de V n'interviennent pas ici. Les mêmes notations seront utilisées plus loin pour des données ne vérifiant pas ces hypothèses.

Pour $\mathcal{Y} \in \mathbf{Stab}(\tilde{G}(F))$, notons $Fib(\mathcal{Y})$ la fibre de $p_{\tilde{G}}$ au-dessus de $\mathcal{Y}$. On adopte de mêmes notations pour $\tilde{G}'$. Sommer sur les $\mathcal{X}' \in \mathbf{Stab}(\tilde{G}'(F))$ tels que $\mathcal{X}' \mapsto \mathcal{X}$ revient à sommer sur les $(\mu, \omega_{\bar{G}}) \in Stab(\tilde{G}(F))$ tels que $p_{\tilde{G}}(\mu, \omega_{\bar{G}}) = \mathcal{X}$ et sur les $(\mu', \omega_{\bar{G}'})$ tels que $(\mu', \omega_{\bar{G}'}) \mapsto (\mu, \omega_{\bar{G}})$, à condition d'affecter les termes d'un coefficient $|Fib(p_{\tilde{G}'}(\mu', \omega_{\bar{G}'}))|^{-1}$. Ce nombre d'éléments se calcule aisément à l'aide de 1.1(4). Notons $Fix^{G'}(\mu', \omega_{\bar{G}'})$ le groupe des $w \in W^{G'}$ tels que $w\mu' = \mu'$, $w(\Sigma_+(\mu')) = \Sigma_+(\mu')$ et $w\omega_{\bar{G}'}(\sigma)\sigma_{G'^*}(w)^{-1} = \omega_{\bar{G}'}(\sigma)$ pour tout $\sigma \in \Gamma_F$. Alors

$$(4) \qquad |Fib(p_{\tilde{G}'}(\mu', \omega_{\bar{G}'}))| = |W^{G'}||W^{G'}(\mu')|^{-1}|Fix^{G'}(\mu', \omega_{\bar{G}'})|^{-1}.$$

On obtient

$$\sum_{\mathcal{X}' \in \mathbf{Stab}(G'(F)); \mathcal{X}' \mapsto \mathcal{X}} transfert(\underline{SA}^{\mathbf{G}'}(V, \mathcal{X}')) = \sum_{(\mu, \omega_{\bar{G}}) \in Stab(\tilde{G}(F)), p_{\tilde{G}}(\mu, \omega_{\bar{G}}) = \mathcal{X}}$$

$$\sum_{(\mu', \omega_{\bar{G}'}) \in Stab(\tilde{G}'(F)), (\mu', \omega_{\bar{G}'}) \mapsto (\mu, \omega_{\bar{G}})} |W^{G'}|^{-1}|W^{G'}(\mu')||Fix^{G'}(\mu', \omega_{\bar{G}'})|$$

$$transfert(\underline{SA}^{\mathbf{G}'}(V, p_{\tilde{G}'}(\mu', \omega_{\bar{G}'}))).$$

Cela conduit à l'égalité

$$\underline{A}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(V,\mathcal{X},\omega)=|W^{\theta}|^{-1}\sum_{\mathbf{G}'\in\mathcal{E}_{\hat{T}}(G,\mathbf{a},V)}\sum_{(\mu,\omega_{\bar{G}})\in Stab(\tilde{G}(F)),p_{\tilde{G}}(\mu,\omega_{\bar{G}})=\mathcal{X}}$$

$$\sum_{(\mu',\omega_{\bar{G}'})\in Stab(\tilde{G}'(F)),(\mu',\omega_{\bar{G}'})\mapsto(\mu,\omega_{\bar{G}})} i(\tilde{G},\tilde{G}',\mu',\omega_{\bar{G}'})transfert(\underline{SA}^{\mathbf{G}'}(V,p_{\tilde{G}'}(\mu',\omega_{\bar{G}'}))),$$

où

$$(5)\qquad i(\tilde{G},\tilde{G}',\mu',\omega_{\bar{G}'})=i(\tilde{G},\tilde{G}')|Out(\mathbf{G}')||W^{G'}(\mu')||Fix^{G'}(\mu',\omega_{\bar{G}'})|.$$

Pour tout $(\mu,\omega_{\bar{G}})\in Fib(\mathcal{X})$, on a la formule parallèle à (4) :

$$|Fib(\mathcal{X})|=|W^{\theta}||W^{G}(\mu)|^{-1}|Fix^{G}(\mu,\omega_{\bar{G}})|^{-1}.$$

Posons

$$(6)\qquad \underline{A}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(V,\mu,\omega_{\bar{G}},\omega)=|W^{G}(\mu)|^{-1}|Fix^{G}(\mu,\omega_{\bar{G}})|^{-1}\sum_{\mathbf{G}'\in\mathcal{E}_{\hat{T}}(G,\mathbf{a},V)}$$

$$\sum_{(\mu',\omega_{\bar{G}'})\in Stab(\tilde{G}'(F)),(\mu',\omega_{\bar{G}'})\mapsto(\mu,\omega_{\bar{G}})} i(\tilde{G},\tilde{G}',\mu',\omega_{\bar{G}'})transfert(\underline{SA}^{\mathbf{G}'}(V,p_{\tilde{G}'}(\mu',\omega_{\bar{G}'}))).$$

On obtient la formule

$$\underline{A}^{G,\mathcal{E}}(V,\mathcal{X},\omega)=|Fib(\mathcal{X})|^{-1}\sum_{(\mu,\omega_{\bar{G}})\in Fib(\mathcal{X})}\underline{A}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(V,\mu,\omega_{\bar{G}},\omega).$$

Enonçons une forme plus précise du théorème 3.3, qui implique celui-ci d'après la formule précédente.

Proposition. *Soient $\mathcal{X}$ et V comme plus haut. Pour tout $(\mu,\omega_{\bar{G}})\in Fib(\mathcal{X})$, on a l'égalité*

$$\underline{A}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(V,\mu,\omega_{\bar{G}},\omega)=A^{\tilde{G}}(V,\mathcal{X},\omega).$$

C'est cette assertion que nous allons prouver. On fixe jusqu'à la fin de la preuve un élément $(\mu,\omega_{\bar{G}})\in Fib(\mathcal{X})$.

5.2 Descente des données endoscopiques

On identifie <u>la</u> paire de Borel épinglée $\mathcal{E}^*=(B^*,T^*,(E_\alpha)_{\alpha\in\Delta})$ de G à une paire particulière. On relève μ en (ν,e) avec $\nu\in T^*$ et $e\in Z(\tilde{G},\mathcal{E}^*)$. On pose $\eta=\nu e$ et $\bar{G}=G_\eta$. On note $\bar{T}$ le tore $T^{*,\theta^*,0}$ vu comme un sous-tore maximal de $\bar{G}$. On rappelle que $\Sigma(\mu)$ s'identifie à l'ensemble de racines $\Sigma^{\bar{G}}(\bar{T})$ de $\bar{T}$ dans $\bar{G}$. On fixe une paire de Borel épinglée $\bar{\mathcal{E}}$ de $\bar{G}$ dont la paire de Borel sous-jacente soit $(\bar{B},\bar{T})$, où $\bar{B}=B^*\cap\bar{G}$, et on munit $\bar{G}$ de l'unique action galoisienne $\sigma\mapsto\sigma_{\bar{G}}$ conservant $\bar{\mathcal{E}}$ et coïncidant sur $\bar{T}=T^{*,\theta,0}$ avec l'action $\sigma\mapsto\omega_{\bar{G}}(\sigma)\sigma_{G^*}$. Il est clair que cette action galoisienne s'étend en une action sur le groupe $I_\eta=Z(G)^\theta\bar{G}$ et on munit ce groupe de cette action. On introduit le groupe dual $\hat{\bar{G}}$, muni d'une paire de Borel épinglée dont on note la paire sous-jacente $(\hat{\bar{B}},\hat{\bar{T}})$. On peut identifier $\hat{\bar{T}}$ à $\hat{T}/(1-\hat{\theta})(\hat{T})$, muni de l'action galoisienne $\sigma\mapsto\omega_{\bar{G}}(\sigma)\sigma_{G^*}$. L'ensemble de racines $\Sigma^{\hat{\bar{G}}}(\hat{\bar{T}})$ est en bijection avec $\Sigma(\mu)$ et le sous-ensemble positif déterminé par $\hat{\bar{B}}$ correspond au sous-ensemble $\Sigma_+(\mu)$.

Considérons une donnée endoscopique de $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$ de la forme $\mathbf{G}' = (G', \mathcal{G}', s\hat{\theta})$, avec $s \in \hat{T}$. On la suppose elliptique. Soit $(\mu', \omega_{\bar{G}'}) \in Stab(\tilde{G}'(F))$ tel que $(\mu', \omega_{\bar{G}'}) \mapsto (\mu, \omega_{\bar{G}})$. Posons $\hat{\bar{T}}_{ad} = \hat{\bar{T}}/Z(\hat{\bar{G}})$. C'est un quotient de $\hat{T}$. Notons $\bar{s}$ l'image de s dans ce groupe. Posons $\hat{\bar{H}} = Z_{\hat{\bar{G}}_{AD}}(\bar{s})^0$. On munit ce groupe de la paire de Borel $(\hat{\bar{B}}_{ad} \cap \hat{\bar{H}}, \hat{\bar{T}}_{ad})$. D'après la définition de 1.7, il y a une unique cochaîne $\sigma \mapsto \omega_{\bar{H}}(\sigma)$ de Γ_F dans $W(\mu)$ de sorte que l'on ait l'égalité

$$\omega_{\bar{G}'}(\sigma)\omega_{G'}(\sigma) = \omega_{\bar{H}}(\sigma)\omega_{\bar{G}}(\sigma)$$

pour tout $\sigma \in \Gamma_F$. Cette cochaîne s'étend en une cochaîne définie sur W_F. Puisque $W(\mu) = W^{\hat{\bar{G}}} = W^{\hat{\bar{G}}_{AD}}$, pour tout $w \in W_F$, on peut relever $\omega_{\bar{H}}(w)$ en un élément $\bar{g}(w) \in \hat{\bar{G}}_{AD}$ qui normalise $\hat{\bar{T}}_{ad}$. On définit le sous-groupe $\bar{\mathcal{H}} \subset {}^L(\bar{G}_{SC}) = \hat{\bar{G}}_{AD} \rtimes W_F$ engendré par $\hat{\bar{H}}$ et les $(\bar{g}(w), w)$ pour $w \in W_F$. On a prouvé en [W1] 3.5 que ce groupe s'insérait dans une extension scindée

$$1 \to \hat{\bar{H}} \to \bar{\mathcal{H}} \to W_F \to 1.$$

On peut donc munir $\hat{\bar{H}}$ d'une L-action galoisienne compatible avec cette extension. On introduit le groupe réductif $\bar{H}$ défini et quasi-déployé sur F tel que $\hat{\bar{H}}$, muni de cette action galoisienne, soit le groupe dual de $\bar{H}$. On a prouvé en [W1] 3.5 que le triplet $\bar{\mathbf{H}} = (\bar{H}, \bar{\mathcal{H}}, \bar{s})$ était une donnée endoscopique de $\bar{G}_{SC}$. Il s'agit ici d'endoscopie non tordue, toute torsion et tout caractère ont disparu. On fixe une paire de Borel $(B^{\bar{H}}, T^{\bar{H}})$ de $\bar{H}$ définie sur F.

Remarque. Dans [W1], la situation de départ n'était pas la même qu'ici, on partait d'un diagramme. Mais on vérifie aisément que les présentes hypothèses sont suffisantes pour assurer la validité des propriétés énoncées ci-dessus. La même remarque vaut pour la suite. D'autre part, dans [W1], le corps de base était local non-archimédien mais les constructions valent évidemment pour tout corps de base. Enfin, on a déjà repris cette construction dans la section 5 de [III], où l'on a noté $\bar{\mathbf{G}}'$ la donnée $\bar{\mathbf{H}}$. Il nous semble plus clair de revenir ici à la notation de [W1], la notation $\bar{G}'$ étant déjà utilisée.

Fixons un élément $\epsilon \in \tilde{G}'_{ss}(F)$ et une paire de Borel (B_ϵ, T_ϵ) vérifiant les conditions du (ii) du lemme 1.3 relativement à l'élément $(\mu', \omega_{\bar{G}'})$. Le groupe G'_ϵ est quasi-déployé et est muni de la paire de Borel $(B^*_\flat, T_\epsilon)$ définie dans ce lemme. Fixons une paire de Borel $(B^{G'}, T^{G'})$ de G' définie sur F. Par la construction de ce lemme, le tore T_ϵ s'identifie à $T^{G'}$, l'identification n'étant pas Γ_F-équivariante : elle identifie l'action galoisienne sur T_ϵ avec l'action $\sigma \mapsto \omega_{\bar{G}'}(\sigma)\sigma_{G'}$ sur $T^{G'}$. On a alors un diagramme

$$(1) \qquad \begin{array}{ccccc} T^{\bar{H}}_{sc} & & & & T_{\epsilon,sc} \\ \downarrow & & & & \\ T^{\bar{H}} & & & & \downarrow \\ \| & & & & \\ \bar{T}_{sc} & & & & T_\epsilon \\ \downarrow & & & & \\ \bar{T} & & & & \| \\ \downarrow & & & & \\ T^* & \to & T^*/(1-\theta^*)(T^*) & \simeq & T^{G'} \end{array}$$

(on a noté $T^{\bar{H}}_{sc}$, resp. $T_{\epsilon,sc}$, $\bar{T}_{sc}$, les images réciproques de $T^{\bar{H}}$ dans $\bar{H}_{SC}$, resp. de T_ϵ dans $G'_{\epsilon,SC}$, resp. de $\bar{T}$ dans $\bar{G}_{SC}$). Pour tout tore S, posons $X_{*,\mathbb{Q}}(S)=X_*(S)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$. Le lemme [W1] 3.6 affirme qu'il se déduit de ce diagramme un isomorphisme

$$X_{*,\mathbb{Q}}(T^{\bar{H}}_{sc})\simeq X_{*,\mathbb{Q}}(T_{\epsilon,sc})$$

qui est équivariant pour les actions galoisiennes et grâce auquel les deux groupes $\bar{H}_{SC}$ et $G'_{\epsilon,SC}$ forment une paire endoscopique non standard.

Le lemme [W1] 3.6 nous dit que du diagramme (1) se déduit un diagramme commutatif

$$(2)\qquad \begin{array}{ccc} X_{*,\mathbb{Q}}(Z(G)^{\theta,0}) & \to & X_{*,\mathbb{Q}}(Z(G')^0)\\ \downarrow & & \\ X_{*,\mathbb{Q}}(Z(\bar{G})^0) & & \downarrow\\ \downarrow & & \\ X_{*,\mathbb{Q}}(Z(\bar{G})^0)\oplus X_{*,\mathbb{Q}}(Z(\bar{H})^0) & \simeq & X_{*,\mathbb{Q}}(Z(G'_\epsilon)^0)\end{array}$$

Il est formé d'applications injectives équivariantes pour les actions galoisiennes et la flèche du bas est un isomorphisme.

On a

(3) supposons $(\mu',\omega_{\bar{G}'})$ elliptique ; alors la donnée endoscopique $\bar{\mathbf{H}}$ de $\bar{G}_{SC}$ est elliptique.

Preuve. L'hypothèse implique que ϵ est elliptique dans $\tilde{G}'(F)$. Dans le diagramme (2), on prend les invariants par Γ_F. La flèche verticale de droite devient un isomorphisme par ellipticité de ϵ. La flèche horizontale du haut aussi par ellipticité de $\mathbf{G}'$. Donc les deux flèches de gauche deviennent aussi des isomorphismes. Cela entraîne $X_{*,\mathbb{Q}}(Z(\bar{H})^0)^{\Gamma_F}=\{0\}$ et l'assertion. $\square$

On a

(4) supposons $S(p_{\tilde{G}'}(\mu',\omega_{\bar{G}'}),\tilde{K}')\subset V$; alors la donnée $\bar{\mathbf{H}}$ est non ramifiée hors de V.

La preuve est la même qu'en 1.7(4). Soit $v\not\in V$ et σ dans le groupe d'inertie I_v. L'hypothèse implique $\omega_{\bar{G}'}(\sigma)=1$. On a $\omega_{G'}(\sigma)=1$ puisque $\mathbf{G}'$ n'est pas ramifiée en v. Donc $\omega_{\bar{G}}(\sigma)=\omega_{\bar{H}}(\sigma)^{-1}$. Cet élément appartient à $W^{\bar{G}}$ car $\omega_{\bar{H}}(\sigma)\in W^{\bar{G}}$ et il conserve l'ensemble des racines positives de $\bar{T}$ dans $\bar{G}$ car c'est le cas de $\omega_{\bar{G}}(\sigma)$. Ces deux conditions entraînent qu'il est égal à 1, c'est-à-dire $\omega_{\bar{H}}(\sigma)=1$. Dans le cas d'endoscopie non tordue, cela suffit à assurer que la donnée $(\bar{H},\bar{\mathcal{H}},\bar{s})$ est non ramifiée en v. $\square$

Posons quelques définitions. Soit v une place de F. Soient $\bar{G}_0$ un groupe réductif connexe défini sur F_v et $\psi_v:\bar{G}_0\to\bar{G}$ un torseur intérieur (pour l'action de Γ_{F_v}). Soient $(B_\flat,T_\flat)$, $(B_{\bar{H}},T_{\bar{H}})$, $(B_\natural,T_\natural)$ et $(B_{\natural,0},T_{\natural,0})$ des paires de Borel respectivement de G'_ϵ, $\bar{H}$, $\bar{G}$ et $\bar{G}_0$ définies sur $\bar{F}_v$. En conjuguant les trois premières paires en celles fixées plus haut, on obtient des isomorphismes

$$(5)\qquad X_{*,\mathbb{Q}}(T_{\bar{H},sc})\simeq X_{*,\mathbb{Q}}(T_{\flat,sc})$$

et

$$(6)\qquad T_{\bar{H}}\simeq T_{\natural,sc}.$$

La donnée de ψ_v établit aussi un isomorphisme

$$(7)\qquad T_\natural\simeq T_{\natural,0}.$$

Il se déduit de (6) et (7) un isomorphisme

$$(8)\qquad T_{\bar{H}}\simeq T_{\natural,0,sc}$$

qui ne dépend pas de la paire $(B_\natural, T_\natural)$. On dit que $(B_\flat, T_\flat)$ et $(B_{\bar{H}}, T_{\bar{H}})$ se correspondent si $T_\flat$ et $T_{\bar{H}}$ sont définis sur F_v et que (5) est équivariant pour l'action de Γ_{F_v}. On définit de même la notion de correspondance entre $(B_{\bar{H}}, T_{\bar{H}})$ et $(B_\natural, T_\natural)$, resp. $(B_\natural, T_\natural)$ et $(B_{\natural,0}, T_{\natural,0})$, resp. $(B_{\bar{H}}, T_{\bar{H}})$ et $(B_{\natural,0}, T_{\natural,0})$, en remplaçant l'isomorphisme (5) respectivement par (6), (7) et (8).

Les mêmes définitions peuvent être posées sur le corps de base F, en remplaçant simplement ci-dessus F_v et $\bar{F}_v$ par F et $\bar{F}$.

5.3 La sous-somme attachée à une donnée endoscopique H

Considérons la définition 5.1(6). Dans la somme en $(\mu', \omega_{\bar{G}'})$, on peut ajouter les conditions que $(\mu', \omega_{\bar{G}'})$ est elliptique et que $S(p_{\tilde{G}'}(\mu', \omega_{\bar{G}'}), \tilde{K}') \subset V$. En effet, si elles ne sont pas vérifiées, la distribution $\underline{SA}^{\mathbf{G}'}(V, p_{\tilde{G}'}(\mu', \omega_{\bar{G}'}))$ est nulle. Notons $E_{\hat{\bar{T}}_{ad},\star}(\bar{G}_{SC}, V)$ l'ensemble des données endoscopiques de $\bar{G}_{SC}$ de la forme $\bar{\mathbf{H}} = (\bar{H}, \bar{\mathcal{H}}, \bar{s})$, où $\bar{s} \in \hat{\bar{T}}_{ad}$, qui sont elliptiques et non ramifiées hors de V. A partir de $\mathbf{G}' = (G', \mathcal{G}', s\hat{\theta}) \in \mathcal{E}_{\hat{T}}(G, \omega, V)$ et de $(\mu', \omega_{\bar{G}'}) \in Stab(\tilde{G}'(F))$ vérifiant les deux conditions ci-dessus et tel que $(\mu', \omega_{\bar{G}'}) \mapsto (\mu, \omega_{\bar{G}})$, on a construit une donnée endoscopique $\bar{\mathbf{H}}$ de $\bar{G}_{SC}$, qui appartient à $E_{\hat{\bar{T}}_{ad},\star}(\bar{G}_{SC}, V)$, cf. 5.2(3) et (4) . Pour $\mathbf{H} \in E_{\hat{\bar{T}}_{ad},\star}(\bar{G}_{SC}, V)$, on note $\mathcal{J}(\mathbf{H})$ la fibre de cette application. On note $\underline{A}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(V, \mathbf{H}, \omega)$ la sous-somme de l'expression 5.1(6), où on somme sur les triplets $(\mathbf{G}', \mu', \omega_{\bar{G}'}) \in \mathcal{J}(\mathbf{H})$. Autrement dit

$$\underline{A}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(V, \mathbf{H}, \omega) = |W^G(\mu)|^{-1} |Fix^G(\mu, \omega_{\bar{G}})|^{-1} \sum_{(\mathbf{G}', \mu', \omega_{\bar{G}'}) \in \mathcal{J}(\mathbf{H})}$$

$$i(\tilde{G}, \tilde{G}', \mu', \omega_{\bar{G}'}) transfert(\underline{SA}^{\mathbf{G}'}(V, p_{\tilde{G}'}(\mu', \omega_{\bar{G}'}))).$$

On a l'égalité

$$(1) \qquad \underline{A}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(V, \mu, \omega_{\bar{G}}, \omega) = \sum_{\mathbf{H} \in E_{\hat{\bar{T}}_{ad},\star}(\bar{G}_{SC}, V)} \underline{A}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(V, \mathbf{H}, \omega).$$

On fixe jusqu'en 8.1 une donnée $\mathbf{H} \in E_{\hat{\bar{T}}_{ad},\star}(\bar{G}_{SC}, V)$. On va étudier la distribution $\underline{A}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(V, \mathbf{H}, \omega)$.

5.4 Propriétés de relevance

Soit $v \in Val(F)$, plaçons-nous sur le corps F_v. Considérons l'ensemble D_v des couples $(\eta_v, r_v) \in \tilde{G}(F_v) \times G(\bar{F}_v)$ tels que

(1) $r_v \eta_v r_v^{-1} = \eta$;

(2) en utilisant la paire de Borel $ad_{r_v^{-1}}(B^*, T^*)$ dans la construction de 1.2, on ait l'égalité $(\mu_{\eta_v}, \omega_{\eta_v}) = (\mu, \omega_{\bar{G}_v})$.

On peut traduire cette condition (2) de la façon suivante. La condition (1) implique que l'automorphisme ad_{r_v} se restreint en un isomorphisme de G_{η_v} sur $G_\eta = \bar{G}$. Le groupe G_{η_v} étant muni de sa structure galoisienne naturelle et le groupe $\bar{G}$ étant muni de sa structure quasi-déployée définie en 5.2, (2) équivaut à ce que ad_{r_v} soit un torseur intérieur de G_{η_v} sur $\bar{G}$ que l'on note ψ_{r_v}.

Le groupe $I_\eta = I_\eta(\bar{F}_v)$ agit à gauche sur D_v par $(x, (\eta_v, r_v)) \mapsto (\eta_v, xr_v)$. Le groupe $G(F_v)$ agit à droite par $((\eta_v, r_v), g) \mapsto (g^{-1}\eta_v g_v, r_v g)$.

On se rappelle notre hypothèse 5.1(3) : l'image de $\mathcal{X}$ dans $\mathbf{Stab}(\tilde{G}(F_v))$ appartient à l'image de l'application $\chi^{\tilde{G}_v}$. Montrons que

(3) l'ensemble D_v est non vide;

fixons $(\eta_v, r_v) \in D_v$ et rappelons que l'on a défini l'ensemble $\mathcal{Y}_{\eta_v}$ en 1.2; on a

(4) l'ensemble D_v coïncide avec l'ensemble des $(y^{-1}\eta_v y, r_v y)$ pour $y \in \mathcal{Y}_{\eta_v}$.

Preuve. La proposition 1.2 vaut bien sûr aussi sur le corps de base F_v. L'hypothèse 5.1(3) implique que l'on peut fixer $\eta_v \in \tilde{G}_{ss}(F_v)$ et une paire de Borel (B, T) conservée par ad_{η_v} de sorte que le couple $(\mu_{\eta_v}, \omega_{\eta_v})$ déduit de ces données ait même image que $(\mu, \omega_{\bar{G}_v})$ dans $\mathbf{Stab}(\tilde{G}(F_v))$. D'après 1.2(3), on peut modifier (B, T) de sorte que $(\mu_{\eta_v}, \omega_{\eta_v}) = (\mu, \omega_{\bar{G}_v})$. Fixons $r'_v \in G = G(\bar{F}_v)$ tel que $(B, T) = ad_{r'_v{}^{-1}}(B^*, T^*)$. Par construction, l'égalité $\mu_{\eta_v} = \mu$ équivaut à la relation $r'_v \eta_v r'_v{}^{-1} \in (1 - \theta^*)(T^*)\eta$. En multipliant r'_v à gauche par un élément convenable de T^*, on obtient un élément r_v tel que (1) soit vérifiée. La propriété (2) l'est aussi par construction. Alors $(\eta_v, r_v) \in D_v$, ce qui prouve (3). Soit $(\eta_v, r_v) \in D_v$. Pour $y \in \mathcal{Y}_{\eta_v}$, il est clair que l'élément $(y^{-1}\eta_v y, r_v y)$ vérifie (1). Il résulte du (iii) de la proposition 1.2 que le couple $(\omega_{y^{-1}\eta_v y}, \omega_{y^{-1}\eta_v y})$ associé à $y^{-1}\eta_v y$ et à la paire $ad_{y^{-1}r_v^{-1}}(B^*, T^*)$ est égal au couple $(\mu_{\eta_v}, \omega_{\eta_v})$ associé à η_v et à la paire $ad_{r_v^{-1}}(B^*, T^*)$, donc à $(\mu, \omega_{\bar{G}_v})$. Donc $(y^{-1}\eta_v y, r_v y) \in D_v$. Inversement, soit $(\eta'_v, r'_v) \in D_v$. La même proposition 1.2(iii) implique qu'il existe $y_1 \in \mathcal{Y}_{\eta_v}$ de sorte que $\eta'_v = y_1^{-1}\eta_v y_1$ et $ad_{r'_v{}^{-1}}(B^*, T^*) = ad_{y_1^{-1}r_v^{-1}}(B^*, T^*)$. Cette dernière égalité implique $r'_v \in T^* r_v y_1$. En posant $T = ad_{r_v^{-1}}(T^*)$, cela équivaut à l'existence de $t \in T$ tel que $r'_v = r_v t y_1$. Les égalités $r'_v \eta'_v r'_v{}^{-1} = \eta = r_v \eta_v r_v^{-1}$ et $\eta'_v = y_1^{-1}\eta_v y_1$ impliquent alors $t\eta_v t^{-1} = \eta_v$, donc $t \in T^\theta \subset I_{\eta_v}$. L'élément $y = ty_1$ appartient à $\mathcal{Y}_{\eta_v}$ et on a l'égalité $(\eta'_v, r'_v) = (y^{-1}\eta_v y, r_v y)$. Cela prouve (4). $\square$

Soit $(\eta_v, r_v) \in D_v$. La donnée locale $\mathbf{H}_v$ étant une donnée endoscopique de $\bar{G}_{SC}$ est aussi une donnée endoscopique pour $G_{\eta_v,SC}$, via le torseur ψ_{r_v} introduit ci-dessus. On dira plus précisément que c'est une donnée endoscopique pour $(G_{\eta_v,SC}, \psi_{r_v})$. On note D_v^{rel} l'ensemble des $(\eta_v, r_v) \in D_v$ tels que $\mathbf{H}_v$ est relevante pour $(G_{\eta_v,SC}, \psi_{r_v})$. Pour deux éléments (η_v, r_v) et (η'_v, r'_v) de D_v dans la même double classe modulo les actions de I_η à gauche et de $G(F_v)$ à droite, les couples (G_{η_v}, ψ_{r_v}) et $(G_{\eta'_v}, \psi_{r'_v})$ sont isomorphes. Il en résulte que D_v^{rel} est invariant par les actions de I_η et $G(F_v)$.

On a défini l'ensemble $\mathcal{J}(\mathbf{H})$ en 5.3. Introduisons un ensemble $\mathcal{J}_\star(\mathbf{H})$ a priori plus gros. Notons $E_{\hat{T},\star}(\tilde{G}, \mathbf{a}, V)$ l'ensemble des données endoscopiques de $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$ qui sont de la forme $\mathbf{G}' = (G', \mathcal{G}', s\hat{\theta})$ avec $s \in \hat{T}$ et qui sont elliptiques et non ramifiées hors de V. Fixons un ensemble de représentants $\mathcal{E}_{\hat{T},\star}(\tilde{G}, \mathbf{a}, V)$ des classes de $\hat{T}$-équivalence dans $E_{\hat{T},\star}(\tilde{G}, \mathbf{a}, V)$. La différence avec $\mathcal{E}_{\hat{T}}(\tilde{G}, \mathbf{a}, V)$ est que les données $\mathbf{G}'$ ne sont pas supposées relevantes. Une partie de nos constructions vaut aussi bien sans cette hypothèse de relevance. On peut supposer $\mathcal{E}_{\hat{T}}(\tilde{G}, \mathbf{a}, V) \subset \mathcal{E}_{\hat{T},\star}(\tilde{G}, \mathbf{a}, V)$. On note $\mathcal{J}_\star(\mathbf{H})$ l'ensemble des triplets $(\mathbf{G}', \mu', \omega_{\bar{G}'})$, où $\mathbf{G}' \in \mathcal{E}_{\hat{T},\star}(\tilde{G}, \mathbf{a}, V)$ et $(\mu', \omega_{\bar{G}'}) \in \mathbf{Stab}(\tilde{G}'(F))$, tels que

- $(\mu', \omega_{\bar{G}'}) \mapsto (\mu, \omega_{\bar{G}})$;
- $(\mu', \omega_{\bar{G}'})$ est elliptique et $S(p_{\tilde{G}'}(\mu', \omega_{\bar{G}'}), \tilde{K}') \subset V$;
- $\mathbf{H}$ est associé à $(\mathbf{G}', \mu', \omega_{\bar{G}'})$ par la construction de 5.2.

Soit $(\mathbf{G}', \mu', \omega_{\bar{G}'}) \in \mathcal{J}_\star(\mathbf{H})$. On définit un élément $\epsilon \in \tilde{G}'(F)$ comme en 5.2, dont on reprend les notations.

Lemme. *Supposons que la classe de conjugaison stable de ϵ dans $\tilde{G}'(F_v)$ corresponde à* *une classe de conjugaison stable dans $\tilde{G}(F_v)$. Alors D_v^{rel} n'est pas vide.*

Preuve. Par hypothèse, il existe un diagramme $(\epsilon, B', T', B, T, \eta_v)$ joignant ϵ à un élément semi-simple $\eta_v \in \tilde{G}(F_v)$. Comme on l'a vu en [I] 1.10, on peut remplacer B' par n'importe quel Borel contenant T', quitte à changer B. On peut donc supposer que la paire (B', T') est conjuguée à la paire (B_ϵ, T_ϵ) que l'on a fixée en 5.2 par un élément de G'_ϵ. Comme on l'a vu dans la preuve de la proposition 1.2, la construction de ce paragraphe est insensible à une telle conjugaison. Donc, en utilisant la paire (B', T'), on a l'égalité $(\mu_\epsilon, \omega_\epsilon) = (\mu', \omega_{\bar{G}'_v})$. Fixons $r_v \in G(\bar{F}_v)$ tel que $ad_{r_v}(B, T) = (B^*, T^*)$. Dans la preuve du lemme 1.8(i), on a calculé le couple $(\mu_{\eta_v}, \omega_{\eta_v})$ déduit de la paire (B, T). Il est égal à l'image $(\mu, \omega_{\bar{G}_v})$ de $(\mu_\epsilon, \omega_\epsilon)$. Or μ_{η_v} est l'image de $ad_{r_v}(\eta_v)$ dans $(T^*/(1-\theta^*)(T^*)) \times_{\mathcal{Z}(G)} \mathcal{Z}(\tilde{G})$. Donc $ad_{r_v}(\eta_v)$ et η ont même image dans cet ensemble. Quitte à multiplier r_v à gauche par un élément de T^*, on peut supposer $ad_{r_v}(\eta_v) = \eta$. Alors le couple (η_v, r_v) appartient à D_v. Il se déduit de (B, T) une paire de Borel $(B_\natural, T_\natural) = (B \cap G_{\eta_v}, T \cap G_{\eta_v})$ de G_{η_v}, puis une paire de Borel $(B_{\natural,sc}, T_{\natural,sc})$ de $G_{\eta_v,SC}$. D'autre part, puisque $\bar{H}_{SC}$ et $G'_{\epsilon,SC}$ sont en situation d'endoscopie non standard, on peut fixer une paire de Borel $(B_{\bar{H}}, T_{\bar{H}})$ de $\bar{H}$ (on rappelle que le corps de base est ici F_v) qui correspond à (B'_{sc}, T'_{sc}). Puisque $\mathbf{H}_v$ est une donnée endoscopique de $(G_{\eta_v,SC}, \psi_{r_v})$, les deux paires $(B_{\bar{H}}, T_{\bar{H}})$ et $(B_{\natural,sc}, T_{\natural,sc})$ définissent un isomorphisme de $T_{\natural,sc}$ sur $T_{\bar{H}}$. Les propriétés d'équivariance du diagramme 5.2(1) entraînent que cet isomorphisme est défini sur F_v, autrement dit que les paires ci-dessus se correspondent. Cela implique que $\mathbf{H}_v$ est relevante pour $(G_{\eta_v,SC}, \psi_{r_v})$. $\square$

Inversement, soit $(\eta_v, r_v) \in D_v^{rel}$. On peut alors fixer des paires de Borel $(B_{\bar{H}}, T_{\bar{H}})$ de $\bar{H}$ et $(B_\natural, T_\natural)$ de G_{η_v} qui se correspondent via le torseur ψ_{r_v}. Les couples $ad_{r_v}(B_\natural, T_\natural)$ et $(\bar{B}, \bar{T})$ sont des paires de Borel de G_η sur $\bar{F}_v$. On peut fixer $x_v \in G_\eta$ de sorte que $ad_{x_v r_v}(B_\natural, T_\natural) = (\bar{B}, \bar{T})$. Posons $(B, T) = ad_{x_v r_v}^{-1}(B^*, T^*)$. On a $B \cap G_{\eta_v} = B_\natural$ et $T \cap G_{\eta_v} = T_\natural$. D'autre part, puisque les groupes $G'_{\epsilon,SC}$ et $\bar{H}_{SC}$ sont en situation d'endoscopie non standard, on peut fixer une paire de Borel $(B_\flat, T_\flat)$ de G'_ϵ qui correspond à $(B_{\bar{H}}, T_{\bar{H}})$. On peut fixer $u_v \in G'_\epsilon$ tel que $(B_\flat, T_\flat) = ad_{u_v}(B_\flat^*, T_\epsilon)$. Posons $(B', T') = ad_{u_v}(B_\epsilon, T_\epsilon)$. On a $B' \cap G'_\epsilon = B_\flat$ et $T' = T_\flat$. De nouveau, les propriétés d'équivariance du diagramme 5.2(1) entraînent que

(5) le sextuplet $(\epsilon, B', T', B, T, \eta_v)$ est un diagramme.

5.5 Les places hors de V

Soit v une place de F, provisoirement quelconque. On a défini en [I] 2.7 le groupe $G_\sharp = G/Z(G)^\theta$. On a une suite de projections $G \to G_\sharp \to G_{AD}$. On note $\underline{G}_\sharp(F_v)$ le sous-groupe des $g \in G(\bar{F}_v)$ dont l'image dans $G_\sharp(\bar{F}_v)$ appartient à $G_\sharp(F_v)$. Pour $g \in \underline{G}_\sharp(F_v)$, les automorphismes ad_g de G et de $\tilde{G}$ sont tous deux définis sur F. Pour $(\eta_v, r_v) \in D_v$, $\underline{G}_\sharp(F_v)$ est inclus dans $\mathcal{Y}_{\eta_v}$. Il résulte de 5.4(4) que $\underline{G}_\sharp(F_v)$ agit à droite sur D_v par $((\eta_v, r_v), g) \mapsto (g^{-1}\eta_v g, r_v g)$. Cette action étend celle de $G(F_v)$.

Supposons maintenant $v \notin V$. Le groupe K_v détermine un sous-groupe hyperspécial $K_{\sharp,v}$ de $G_\sharp(F_v)$. On note $\underline{K}_{\sharp,v}$ le sous-groupe des éléments de $\underline{G}_\sharp(F_v)$ dont l'image dans $G_\sharp(F_v)$ appartient à $K_{\sharp,v}$. Utilisons les notations de 1.5. On a

(1) $\underline{K}_{\sharp,v}$ est inclus dans $Z(G)^\theta K_v^{nr}$; pour $g \in \underline{K}_{\sharp,v}$, l'automorphisme ad_g de $\tilde{G}$ conserve $\tilde{K}_v$.

Preuve. La surjectivité de l'application $G \to G_\sharp$ se prolonge en la surjectivité de l'application analogue entre les schémas en groupes associés à K_v et $K_{\sharp,v}$. On voit ainsi qu'il y a une suite exacte

$$1 \to Z(G)^\theta \cap K_v^{nr} \to K_v^{nr} \to K_{\sharp,v}^{nr} \to 1.$$

Tout élément de $K_{\sharp,v}$ se relève donc en un élément de K_v^{nr}. La première assertion en résulte. La seconde a été vue à la fin de la preuve de la proposition 2.1. $\square$

On note D_v^{nr} l'ensemble des $(\eta_v, r_v) \in D_v$ tels qu'il existe $h \in G(F_v)$ de sorte que $\eta_v \in ad_h^{-1}(\tilde{K}_v)$. Puisque $v \notin V$, on a $v \notin S(\mathcal{X}, \tilde{K})$ d'après l'hypothèse 5.1(1). Le lemme 1.6 implique alors que

(2) D_v^{nr} est non vide ; pour $(\eta_v, r_v) \in D_v^{nr}$ et $h \in G(F_v)$ tel que $\eta_v \in ad_h^{-1}(\tilde{K}_v)$, le groupe G_{η_v} est non ramifié et $G_{\eta_v}(F_v) \cap ad_h^{-1}(K_v)$ est un sous-groupe hyperspécial de $G_{\eta_v}(F_v)$. Plus précisément, en notant $\mathcal{K}_{\eta_v}$ le schéma en groupes associé à ce sous-groupe hyperspécial, on a $\mathcal{K}_{\eta_v}(\mathfrak{o}_E) = G_{\eta_v}(E) \cap ad_{h^{-1}}(\mathcal{K}_v(\mathfrak{o}_E))$ pour toute extension non ramifiée E de F_v.

Il est clair que D_v^{nr} est invariant à gauche par I_η et à droite par $G(F_v)$. Remarquons que, puisque ad_g est défini sur F_v pour tout $g \in \underline{G}_\sharp(F_v)$, les ensembles $G(F_v)\underline{K}_{\sharp,v}$ et $\underline{K}_{\sharp,v}G(F_v)$ sont égaux et ce sont des groupes.

Lemme. *L'ensemble D_v^{nr} est stable par l'action à droite de $\underline{K}_{v,\sharp}$. Il forme une unique double classe modulo l'action à gauche de I_η et à droite de $\underline{K}_{\sharp,v}G(F_v)$.*

Preuve. Soient $(\eta_v, r_v) \in D_v^{nr}$ et $k \in \underline{K}_{\sharp,v}$. Posons $\eta'_v = k^{-1}\eta_v k$, $r'_v = r_v k$. Soit $h \in G(F_v)$ tel que $\eta_v \in ad_h^{-1}(\tilde{K}_v)$. Posons $h' = k^{-1}hk$. C'est un élément de $G(F_v)$. On a

$$\eta'_v \in ad_{k^{-1}h^{-1}}(\tilde{K}_v) = ad_{(h')^{-1}k^{-1}}(\tilde{K}_v) = ad_{(h')^{-1}}(\tilde{K}_v),$$

la dernière égalité résultant de (1). Donc $(\eta'_v, r'_v) \in D_v^{nr}$, ce qui prouve la première assertion. Notons $D_v^{nr,0}$ le sous-ensemble des $(\eta_v, r_v) \in D_v$ tels que $\eta_v \in \tilde{K}_v$. Par définition, D_v^{nr} est engendré par $D_v^{nr,0}$ sous l'action à droite de $G(F_v)$. La deuxième assertion du lemme résulte de

(3) $D_v^{nr,0}$ forme une unique double classe modulo l'action à gauche de G_η et à droite de $\underline{K}_{\sharp,v}$.

Fixons un élément $(\eta_v, r_v) \in D_v^{nr,0}$. C'est loisible puisque D_v^{nr} n'est pas vide. Remarquons que faire agir à gauche un élément de G_η sur (η_v, r_v) revient à faire agir à droite un élément de G_{η_v}. L'assertion à prouver revient à dire que tout élément de $D_v^{nr,0}$ s'écrit $(y^{-1}\eta_v y, r_v y)$ pour un $y \in G_{\eta_v}\underline{K}_{\sharp,v}$. Soit $(\eta'_v, r'_v) \in D_v^{nr,0}$. D'après 5.4(4), il existe $y \in \mathcal{Y}_{\eta_v}$ tel que $(\eta'_v, r'_v) = (y^{-1}\eta_v y, r_v y)$. D'après le lemme [W1] 5.6(i), la relation $y^{-1}\eta_v y \in \tilde{K}_v$ entraîne que $y \in G_{\eta_v}K_v^{nr}$. Ecrivons $y = xk$, avec $x \in G_{\eta_v}$ et $k \in K_v^{nr}$. On a encore $k \in \mathcal{Y}_{\eta_v}$. Notons $Z(G)_{p'}$ le sous-groupe des éléments de $Z(G; \bar{F}_v)$ d'ordre premier à p. C'est un sous-groupe de K_v^{nr} ([W1] 5.5(1)). Le lemme 5.5 de [W1] implique que l'application

$$Z(G)_{p'}^\theta \to G_{\eta_v} \cap K_v^{nr} \backslash I_{\eta_v} \cap K_v^{nr}$$

est surjective.

Fixons un Frobenius $\phi \in \Gamma_{F_v}$. Puisque $k \in \mathcal{Y}_{\eta_v}$, on a $k\phi(k)^{-1} \in I_{\eta_v}$. Puisque $k \in K_v^{nr}$, on a aussi $k\phi(k)^{-1} \in K_v^{nr}$. D'après l'assertion ci-dessus, on peut écrire $k\phi(k)^{-1} = g(\phi)z(\phi)$, avec $g(\phi) \in G_{\eta_v} \cap K_v^{nr}$ et $z(\phi) \in Z(G)_{p'}^\theta$. Par les relations de cocycle habituelles, on prolonge $g(\phi)$ et $z(\phi)$ en des applications définies sur $\phi^{\mathbb{Z}}$. Par exemple, pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$g(\phi^n) = g(\phi)\phi(g(\phi))...\phi^{n-1}(g(\phi)).$$

Parce que $z(\phi)$ est d'ordre fini, on voit qu'il existe $N \geq 1$ tel que $n \mapsto z(\phi^n)$ se factorise par $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$. Puisque $k \in K_v^{nr}$, il en est de même de l'application $n \mapsto k\phi^n(k)^{-1}$. Puisque $g(\phi^n) = k\phi^n(k)^{-1}z(\phi^n)^{-1}$, il en est aussi de même de $n \mapsto g(\phi^n)$. Alors cette application définit un cocycle continu et non ramifié de Γ_{F_v} dans $G_{\eta_v} \cap K_v^{nr}$. Un tel cocycle est un cobord. On peut donc fixer $x_1 \in G_{\eta_v} \cap K_v^{nr}$ de sorte que $g(\phi) = x_1^{-1}\phi(x_1)$. Posons $k_1 = x_1 k$. Alors $k_1\phi(k_1)^{-1} = z(\phi) \in Z(G)^\theta$. Donc $k_1 \in \underline{G}_\sharp(F_v)$. Puisque de plus $k_1 \in K_v^{nr}$, cela implique $k_1 \in \underline{K}_{\sharp,v}$. Alors $y = xx_1^{-1}k_1$ appartient à $G_{\eta_v}\underline{K}_{\sharp,v}$. Cela achève la preuve. $\square$

On a

(4) soit $(\eta_v, r_v) \in D_v^{nr}$; alors $\mathbf{H}_v$ est relevante pour $(G_{\eta_v,SC}, \psi_{r_v})$.

Il s'agit d'endoscopie non tordue. Puisque $G_{\eta_v,SC}$ est quasi-déployé, tout se transfère.

5.6 Une conséquence

Corollaire. *Supposons qu'il existe $v \in V$ tel que $D_v^{rel} = \emptyset$. Alors $\underline{A}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(V, \mathbf{H}, \omega) = 0$.*

Preuve. Par définition, $\underline{A}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(V, \mathbf{H}, \omega)$ est une somme sur les éléments $(\mathbf{G}', \mu', \omega_{\bar{G}'}) \in \mathcal{J}(\mathbf{H})$ des transferts des distributions $\underline{SA}^{\mathbf{G}'}(V, p_{\tilde{G}'}(\mu', \omega_{\bar{G}'}))$. Fixons un tel triplet $(\mathbf{G}', \mu', \omega_{\bar{G}'})$, auquel est associé un élément $\epsilon \in \tilde{G}'(F)$. La distribution $\underline{SA}^{\mathbf{G}'}(V, p_{\tilde{G}'}(\mu', \omega_{\bar{G}'}))$ est supportée par les éléments de $\tilde{G}'(F_V)$ dont la partie semi-simple est stablement conjuguée à ϵ (plus exactement, ces distributions vivent sur des données auxiliaires, mais peu importe ici). Son transfert est nul s'il existe $v \in V$ tel que la classe de conjugaison stable de ϵ dans $\tilde{G}'(F_v)$ ne correspond à aucune classe de conjugaison stable dans $\tilde{G}(F_v)$. D'après le lemme 5.4, il est donc nul s'il existe $v \in V$ tel que $D_v^{rel} = \emptyset$. $\square$

Dorénavant, on suppose $D_v^{rel} \neq \emptyset$ pour tout $v \in V$. Il résulte de 5.5(3) et (4) qu'alors $D_v^{rel} \neq \emptyset$ pour tout $v \in Val(F)$. En conséquence

(1) on a l'égalité $\mathcal{J}_\star(\mathbf{H}) = \mathcal{J}(\mathbf{H})$.

Preuve. Soit $(\mathbf{G}', \mu', \omega_{\bar{G}'}) \in \mathcal{J}_\star(\mathbf{H})$. Le lemme 1.3 entraîne que $\tilde{G}'(F)$ est non-vide. Fixons un élément ϵ comme dans ce lemme. Pour $v \in Val(F)$, soit $(\eta_v, r_v) \in D_v^{rel}$. On a construit en 5.4(5) un diagramme $(\epsilon, B', T', B, T, \eta_v)$. Donc la donnée locale $\mathbf{G}'_v$ est relevante. Par définition, $\mathbf{G}'$ est donc relevante et $(\mathbf{G}', \mu', \omega_{\bar{G}'})$ appartient à $\mathcal{J}_\star(\mathbf{H})$. $\square$

Dorénavant, pour $v \in Val(F)$, on notera d_v un élément de D_v. Quand on aura besoin de l'écrire comme un couple (η_v, r_v), on écrira ce couple $(\eta[d_v], r[d_v])$. On supprimera le torseur ψ_{r_v} de la notation : le groupe $G_{\eta[d_v]}$ sera toujours considéré comme une forme intérieure de $\bar{G}$ via ce torseur. On utilisera des notations analogues dans différentes variantes de notre situation. Par exemple, on pose $D_V = \prod_{v \in V} D_v$ et $D_V^{rel} = \prod_{v \in V} D_v^{rel}$. On note $(\eta[d_V], r[d_V])$ le couple associé à un élément $d_V \in D_V$ etc...

On notera j un élément de $\mathcal{J}(\mathbf{H})$. Quand on a besoin de l'écrire comme un triplet $(\mathbf{G}', \mu', \omega_{\bar{G}'})$, on note ce triplet $(\mathbf{G}'_j, \mu'_j, \omega_{\bar{G}'_j})$ et on affecte tous les objets relatifs à ce triplet d'un indice j. Par exemple, on fixe un élément $\epsilon_j \in \tilde{G}'_j(F)$ vérifiant les conditions du lemme 1.3(ii).

On a

(2) il existe un sous-tore maximal $S_{\bar{H}}$ de $\bar{H}$, défini sur F, tel que, pour toute place $v \in V$, le localisé $S_{\bar{H},v}$ soit elliptique dans $\bar{H}_v$ si v est non-archimédienne et $S_{\bar{H},v}$ soit fondamental dans $\bar{H}_v$ si v est archimédienne.

Preuve. Pour toute place $v \in V$, on peut en tout cas fixer un sous-tore maximal S_v de $\bar{H}_v$ défini sur F_v qui possède cette propriété. On fixe un élément $X_v \in \mathfrak{s}_v(F_v) \cap \bar{\mathfrak{h}}_{reg}(F_v)$. L'espace $\bar{\mathfrak{h}}(F)$ est dense dans $\bar{\mathfrak{h}}(F_V)$. On peut donc fixer $X \in \bar{\mathfrak{h}}(F)$ tel que, pour toute place $v \in V$, X soit arbitrairement proche de X_v. Si X est assez proche de X_v, sa classe de conjugaison par $\bar{H}(F_v)$ coupe $\mathfrak{s}_v(F_v) \cap \bar{\mathfrak{h}}_{reg}(F_v)$. A fortiori, X est semi-simple et régulier. On note $S_{\bar{H}}$ son commutant dans $\bar{H}$. C'est un sous-tore maximal défini sur F. Pour tout $v \in V$, le localisé $S_{\bar{H},v}$ est conjugué à S_v donc possède la propriété requise. □

On fixe un tel tore, que l'on complète en une paire de Borel $(B_{\bar{H}}, S_{\bar{H}})$ définie sur $\bar{F}$. Soit $j \in \mathcal{J}(\mathbf{H})$. Puisque $\bar{H}_{SC}$ et $G'_{j,\epsilon_j,SC}$ sont en situation d'endoscopie non standard, on peut fixer une paire de Borel $(B_{\flat,j}, S_j)$ de G'_{j,ϵ_j} qui correspond à $(B_{\bar{H}}, S_{\bar{H}})$. Puisque $(B_{\flat,j}, S_j)$ et $(B^*_{\flat,j}, T_{\epsilon_j})$ sont deux paires de Borel de G'_{j,ϵ_j} définies sur $\bar{F}$, on peut fixer $u \in G'_{j,\epsilon_j}(\bar{F})$ tel que $(B_{\flat,j}, S_j) = ad_u(B^*_{\flat,j}, T_{\epsilon_j})$. On pose $(B_j, S_j) = ad_u(B_{\epsilon_j}, T_{\epsilon_j})$. C'est une paire de Borel de G'_j définie sur $\bar{F}$ (avec S_j défini sur F) conservée par ad_{ϵ_j}. On a $B_j \cap G'_{j,\epsilon_j} = B_{\flat,j}$.

Soit $v \in Val(F)$ et $d_v \in D_v^{rel}$. Si $v \notin V$, supposons de plus $d_v \in D_v^{nr}$. Montrons que

(3) il existe une paire de Borel $(B_\natural[d_v], S_\natural[d_v])$ de $G_{\eta[d_v]}$ qui correspond à $(B_{\bar{H}}, S_{\bar{H}})$.

Preuve. Le corps de base est ici F_v. Si $v \notin V$, l'hypothèse implique que $G_{\eta[d_v]}$ est quasi-déployé. L'assertion résulte alors de [K1] corollaire 2.2. Supposons $v \in V$. Puisque $\mathbf{H}_v$ est relevante pour $G_{\eta[d_v],SC}$, on peut en tout cas fixer des paires de Borel $(B'_{\bar{H}}, S'_{\bar{H}})$ de $\bar{H}$ et $(B'_{\natural,sc}[d_v], S'_{\natural,sc}[d_v])$ de $G_{\eta[d_v],SC}$ qui se correspondent. Puisque $\bar{G}_{SC}$ est quasi-déployé, on peut, d'après le corollaire 2.2 de [K1], compléter ces deux paires par une paire $(\bar{B}'_{\natural,sc}, \bar{S}'_{\natural,sc})$ de $\bar{G}_{SC}$ qui correspond à chacune de ces paires. On note $M'_{\bar{H}}$ le commutant de $A_{S'_{\bar{H}}}$ dans $\bar{H}$, $\bar{M}'_{sc}$ celui de $A_{\bar{S}'_{\natural,sc}}$ dans $\bar{G}_{SC}$ et $M'_{sc}[d_v]$ celui de $A_{S'_{\natural,sc}[d_v]}$ dans $G'_{\eta[d_v],SC}$. Les trois tores intervenant sont naturellement isomorphes et les trois groupes $M'_{\bar{H}}$, $\bar{M}'_{sc}$ et $M'_{sc}[d_v]$ sont des Levi. On vérifie que $M'_{sc}[d_v]$ est une forme intérieure de $\bar{M}'_{sc}$ et que $M'_{\bar{H}}$ est un groupe endoscopique elliptique de $\bar{M}'_{sc}$, donc aussi de $M'_{sc}[d_v]$. Notons $M_{\bar{H}}$ le commutant de $A_{S_{\bar{H}}}$ dans $\bar{H}$. Si v est non archimédienne, $S_{\bar{H}}$ est elliptique, donc $M_{\bar{H}} = \bar{H}$, a fortiori $M_{\bar{H}} \supset M'_{\bar{H}}$. Si v est archimédienne, $S_{\bar{H}}$ est fondamental. Cela implique que, quitte à effectuer une conjugaison, on peut supposer $M_{\bar{H}} \supset M'_{\bar{H}}$. Dans les deux cas, on a donc $A_{S_{\bar{H}}} \subset A_{S'_{\bar{H}}}$. Le tore $A_{S_{\bar{H}}}$ s'identifie à des sous-tores de $A_{\bar{S}'_{\natural,sc}}$ et $A_{S'_{\natural,sc}[d_v]}$ dont on note $\bar{M}_{sc}$ et $M_{sc}[d_v]$ les commutants dans $\bar{G}_{SC}$ et $G_{\eta[d_v],SC}$. De nouveau, $M_{sc}[d_v]$ est une forme intérieure de $\bar{M}_{sc}$ et $M_{\bar{H}}$ est un groupe endoscopique elliptique de $\bar{M}'_{sc}$, donc aussi de $M'_{sc}[d_v]$. Fixons un sous-groupe de Borel B_0 de $M_{\bar{H}}$ contenant $S_{\bar{H}}$. Puisque $\bar{M}_{sc}$ est quasi-déployé, il résulte du corollaire 2.2 de [K1] que l'on peut fixer une paire de Borel $(B_1, \bar{S}_{sc})$ de $\bar{M}_{sc}$ qui correspond à $(B_0, S_{\bar{H}})$. On a alors $A_{\bar{S}_{sc}} \simeq A_{S_{\bar{H}}} = A_{M_{\bar{H}}} \simeq A_{\bar{M}_{sc}}$. Cela implique que $\bar{S}_{sc}$ est elliptique dans $\bar{M}_{sc}$. D'après [K2] lemme 10.2, il existe donc une paire de Borel $(B_2, S_{\natural,sc}[d_v])$ de $M_{sc}[d_v]$ qui correspond à $(B_1, \bar{S}_{sc})$. Elle correspond aussi à $(B_0, S_{\bar{H}})$. Fixons $u \in \bar{M}_H$ tel que $(B_0, S_{\bar{H}}) = ad_u((B'_{\bar{H}} \cap M_{\bar{H}}), S'_{\bar{H}})$ et posons $B_{\bar{H},0} = ad_u(B'_{\bar{H}})$. Fixons $x \in M_{sc}[d_v]$ tel que $(B_2, S_{\natural,sc}[d_v]) = ad_x((B'_{\natural,sc}[d_v] \cap M_{sc}[d_v]), S'_{\natural,sc}[d_v])$ et posons $B_{\natural,sc,2}[d_v] = ad_x(B'_{\natural,sc}[d_v])$. L'isomorphisme $S_{\bar{H}} \simeq S_{\natural,sc}[d_v]$ déduit des paires de Borel $(B_{\bar{H},0}, S_{\bar{H}})$ de $\bar{H}$ et $(B_{\natural,sc,2}[d_v], S_{\natural,sc}[d_v])$ de $G_{\eta[d_v],SC}$ est le même que celui déduit des paires de Borel $(B_0, S_{\bar{H}})$ de $M_{\bar{H}}$ et $(B_2, S_{\natural,sc}[d_v])$ de $M_{sc}[d_v]$. Il est donc défini sur F_v. Donc les paires de Borel $(B_{\bar{H},0}, S_{\bar{H}})$ et $(B_{\natural,sc,2}[d_v], S_{\natural,sc}[d_v])$ se correspondent. Comme on le sait, on peut remplacer le groupe $B_{\bar{H},0}$ par $B_{\bar{H}}$, quitte à remplacer $B_{\natural,sc,2}[d_v]$ par un sous-groupe de Borel $B_{\natural,sc}[d_v]$ convenable, cf. [I] 1.10. On obtient une paire $(B_{\natural,sc}[d_v], S_{\natural,sc}[d_v])$ de $G_{\eta[d_v],SC}$ qui correspond à $(B_{\bar{H}}, S_{\bar{H}})$. Elle détermine une paire $(B_\natural[d_v], S_\natural[d_v])$ de $G_{\eta[d_v]}$ qui correspond à $(B_{\bar{H}}, S_{\bar{H}})$ au sens de 5.2. □

Fixons une telle paire $(B_\natural[d_v], S_\natural[d_v])$. Comme en 5.4(5), on en déduit une paire de Borel de G, notée ici $(B[d_v], S[d_v])$, qui est conservée par ad_{η_v}. La preuve de 5.4(5) montre que

(4) pour tout $j \in \mathcal{J}(\mathbf{H})$, tout $v \in Val(F)$ et tout $d_v \in D_v^{rel}$ tel que $d_v \in D_v^{nr}$ si $v \notin V$, le sextuplet $(\epsilon_j, B_j, S_j, B[d_v], S[d_v], \eta[d_v])$ est un diagramme sur F_v.

5.7 Facteurs de transfert

Soit $j \in \mathcal{J}(\mathbf{H})$. On fixe des données auxiliaires $G'_{j,1}$, $\tilde{G}'_{j,1}$, $C_{j,1}$, $\hat{\xi}_{j,1}$ pour $\mathbf{G}'_j$, non ramifiées hors de V. On fixe un élément $\epsilon_{j,1} \in \tilde{G}'_{j,1}(F)$ au-dessus de ϵ_j. Pour $v \in Val(F)-V$, l'hypothèse que $S(p_{\tilde{G}'_j}(\mu'_j, \omega_{\bar{G}'_j}), \tilde{K}'_j) \subset V$ et le lemme 1.6 assurent qu'il existe $\epsilon_{j,v} \in \tilde{K}'_{j,v}$ qui soit stablement conjugué à ϵ_j. Fixons $u_v \in G'_j(\bar{F}_v)$ tel que $u_v^{-1}\epsilon_j u_v = \epsilon_{j,v}$ et $u_v\sigma(u_v)^{-1} \in G'_{j,\epsilon_j}$ pour tout $\sigma \in \Gamma_{F_v}$. Posons $\epsilon_{j,1,v} = u_v^{-1}\epsilon_{j,1}u_v$. C'est un élément au-dessus de $\epsilon_{j,v}$ et on vérifie qu'il appartient à $\tilde{G}'_{j,1}(F_v)$. On pose $\tilde{K}'_{j,1,v} = K'_{j,1,v}\epsilon_{j,1,v}$. On peut choisir $x_v = 1$ pour presque tout v. La famille $(\tilde{K}'_{j,1,v})_{v \notin V}$ vérifie alors la condition de compatibilité globale habituelle, c'est-à-dire que, pour $\delta_1 \in \tilde{G}'_{j,1}(F)$, on a $\delta \in \tilde{K}'_{j,1,v}$ pour presque tout v. De ces choix d'espaces hyperspéciaux se déduit un facteur de transfert $\Delta_{j,1,v}$ sur $\tilde{G}'_{j,1}(F_v) \times \tilde{G}(F_v)$ pour toute place $v \notin V$. La relation 5.6(4) et le fait que la paire (B_j, S_j) est définie sur $\bar{F}$ montrent que, non seulement la donnée $\mathbf{G}'_j$ est relevante, mais qu'elle vérifie l'hypothèse **Hyp** de [VI] 3.6 qui permet de définir un facteur de transfert global. De ce facteur global et des facteurs $\Delta_{j,1,v}$ pour $v \notin V$ se déduit comme dans cette référence un facteur de transfert $\Delta_{j,1,V}$ sur $\tilde{G}'_{j,1}(F_V) \times \tilde{G}(F_V)$.

Puisque $\bar{G}_{SC}$ est quasi-déployé, la donnée $\mathbf{H}$ est relevante pour ce groupe. Puisqu'il est aussi simplement connexe, on sait que l'on peut identifier $\bar{\mathcal{H}}$ au L-groupe de $\bar{H}$. Autrement dit, on peut fixer des données auxiliaires $\bar{H}_1$, $\bar{C}_1$ et $\hat{\bar{\xi}}_1$ telles que $\bar{H}_1 = \bar{H}$ et $\bar{C}_1 = \{1\}$. On fixe de telles données. Pour toute place v et tout $d_v \in D_v^{rel}$, ces données auxiliaires valent pour le groupe $G_{\eta[d_v],SC}$. Supposons $v \notin V$ et $d_v \in D_v^{nr}$. Dans ce cas, $\mathbf{H}_v$ est une donnée non ramifiée pour $G_{\eta[d_v],SC}$. On dispose d'un facteur de transfert canonique pourvu que l'on fixe un sous-groupe hyperspécial de $G_{\eta[d_v],SC}(F_v)$ (dans la situation non tordue, la donnée de ce sous-groupe suffit). Pour cela, on fixe un élément $h_v \in G(F_v)$ tel que $h_v^{-1}\eta[d_v]h_v \in \tilde{K}_v$. On choisit le sous-groupe image réciproque dans $G_{\eta[d_v],SC}(F_v)$ de $ad_{h_v}(K_v) \cap G_{\eta[d_v]}(F_v)$. Si $v \in V$, il n'y a pas de choix canonique de facteur de transfert, on en fixe un que l'on note $\Delta[d_v]$. Par le choix de nos données auxiliaires, le facteur $\Delta[d_v]$ est quel que soit v une fonction sur $\bar{H}(F_v) \times G_{\eta[d_v],SC}(F_v)$.

Soient $v \in Val(F)$ et $d_v \in D_v^{rel}$. Soient $\bar{Y}_{sc} \in \bar{\mathfrak{h}}_{SC}(F_v)$, $Z_2 \in \mathfrak{z}(\bar{H}; F_v)$ et $Z_1 \in \mathfrak{z}(\bar{G}; F_v)$. On suppose ces éléments en position générale. Posons $\bar{Y} = \bar{Y}_{sc} + Z_2$. On suppose que la classe de conjugaison stable de $\bar{Y}$ se transfère en une classe de conjugaison stable dans $\mathfrak{g}_{\eta[d_v],SC}(F_v)$. On fixe un élément $X[d_v]_{sc}$ dans cette classe. Puisqu'on a fixé un torseur intérieur entre $\bar{G}$ et $G_{\eta[d_v]}$, les centres de ces groupes s'identifient et on peut considérer Z_1 comme un élément de $\mathfrak{z}(G_{\eta[d_v]}; F_v)$. On pose $X[d_v] = Z_1 + X[d_v]_{sc} \in \mathfrak{g}_{\eta[d_v]}(F_v)$. Soit $j \in \mathcal{J}(\mathbf{H})$. Puisque $\bar{H}_{SC}$ et $G'_{j,\epsilon_j,SC}$ sont en situation d'endoscopie non standard, la classe de conjugaison stable de $\bar{Y}_{sc}$ se transfère en une classe de conjugaison stable dans $\mathfrak{g}'_{j,\epsilon_j,SC}(F_v)$. On fixe un élément $Y_{j,sc}$ dans cette classe. Par le diagramme 5.2(5), $Z_1 + Z_2$ s'identifie à un élément $Z_j \in \mathfrak{z}(G'_{j,\epsilon_j}; F_v)$. On pose $Y_j = Y_{j,sc} + Z_j$. C'est un élément de $\mathfrak{g}'_{j,\epsilon_j}(F_v)$. Supposons les éléments de départ assez proches de 0 pour que toutes les exponentielles qui suivent soient définies. Les classes de conjugaison stable de $exp(Y_j)\epsilon_j$ et de $exp(X[d_v])\eta[d_v]$ se correspondent. Soit $Y_{j,1} \in \mathfrak{g}'_{j,1,\epsilon_{j,1}}(F_v)$ au-dessus de Y_j. On dispose des deux facteurs de transfert $\Delta_{j,1,v}(exp(Y_{j,1})\epsilon_{j,1}, exp(X[d_v])\eta[d_v])$ et $\Delta[d_v](exp(\bar{Y}), exp(X_{sc}[d_v]))$.

Théorème. *(i) Si v est finie, il existe une constante $\delta_j[d_v]$ telle que, pour des éléments comme ci-dessus tels que $Y_{j,1}$ soit assez proche de 0, on ait l'égalité*

$$\Delta_{j,1,v}(exp(Y_{j,1})\epsilon_{j,1}, exp(X[d_v])\eta[d_v]) = \delta_j[d_v]\Delta[d_v](exp(\bar{Y}), exp(X_{sc}[d_v])).$$

(ii) Si v est archimédienne, il existe une constante $\delta_j[d_v]$ et un élément $b_j \in X_*(Z(\hat{G}'_{j,1,\epsilon_{j,1}})^0)\otimes \mathbb{C}$ tels que, pour des éléments comme ci-dessus pour lesquels $Y_{j,1}$ est assez proche de 0, on ait l'égalité

$$\Delta_{j,1,v}(exp(Y_{j,1})\epsilon_{j,1}, exp(X[d_v])\eta[d_v]) = \delta_j[d_v]\Delta[d_v](exp(\bar{Y}), exp(X_{sc}[d_v]))exp(< b_j, Y_{j,1} >).$$

(iii) Si $v \notin V$, on a $\delta_j[d_v] = \omega(h_v)^{-1}$, où h_v est l'élément utilisé pour définir le sous-groupe hyperspécial de $G_{\eta[d_v],SC}(F_v)$.

Preuve. L'assertion (i) est le théorème 3.9 de [W1] : les deux facteurs locaux coïncident à une constante près. L'assertion (ii) a été vue en [V] 4.1. Supposons $v \notin V$. Dans le cas où $h_v = 1$, l'assertion (iii) est la proposition 5.9 de [W1]. On se ramène à ce cas en introduisant le facteur $\Delta'_{j,1,v}$ normalisé à l'aide des espaces $ad_{h_v}(\tilde{K}_v)$ et $\tilde{K}'_{j,1,v}$. On conserve le même facteur $\Delta[d_v]$. On a une nouvelle constante $\delta'_j[d_v]$ dont on vient de dire qu'elle valait 1 : quand on remplace $\tilde{K}_v$ par $ad_{h_v}(\tilde{K}_v)$, on remplace en même temps h_v par 1. Mais on vérifie aisément que $\Delta'_{j,1,v} = \omega(h_v)\Delta_{j,1,v}$. L'assertion (iii) en résulte. $\square$

5.8 Début du calcul de $\underline{A}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(V, \mathbf{H}, \omega)$

Soit $f \in C_c^\infty(\tilde{G}(F_V))$. Notre but est de calculer $I^{\tilde{G}}(\underline{A}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(V, \mathbf{H}, \omega), f)$.

Soit $(\mathbf{G}', \mu', \omega_{\bar{G}'}) \in \mathcal{J}(\mathbf{H})$. On se propose de calculer le terme

$$i(\tilde{G}, \tilde{G}', \mu', \omega_{\bar{G}'})I^{\tilde{G}}(transfert(\underline{SA}^{\mathbf{G}'}(V, \mathcal{X}')), f)$$

qui intervient dans la définition de 5.3, où $\mathcal{X}' = p_{\tilde{G}'}(\mu', \omega_{\bar{G}'})$. On le récrit immédiatement

$$i(\tilde{G}, \tilde{G}', \mu', \omega_{\bar{G}'})S^{\mathbf{G}'}(\underline{SA}^{\mathbf{G}'}(V, \mathcal{X}'), f^{\mathbf{G}'}).$$

On utilise les définitions et notations des paragraphes précédents associées à l'élément $j = (\mathbf{G}', \mu', \omega_{\bar{G}'})$, tout en supprimant cet indice j pour simplifier la notation. Le transfert $f^{\mathbf{G}'}$ s'identifie à un élément $f_1 \in SI^\infty_{\lambda_1}(\tilde{G}'_1(F_V))$. Alors $S^{\mathbf{G}'}(\underline{SA}^{\mathbf{G}'}(V, \mathcal{X}'), f^{\mathbf{G}'})$ est égal à $S^{\tilde{G}'_1}_{\lambda_1}(\underline{SA}^{\tilde{G}'_1}_{\lambda_1}(V, \mathcal{X}'), f_1)$. La distribution $\underline{SA}^{\tilde{G}'_1}_{\lambda_1}(V, \mathcal{X}')$ est définie par une formule similaire à 1.11(3). On fixe une fonction $\phi \in C_c^\infty(\tilde{G}'_1(F_V))$ telle que

$$f_1 = \int_{C_1(F_V)} \phi^c \lambda_1(c)\, dc.$$

On a l'égalité

$$S^{\mathbf{G}'}(\underline{SA}^{\mathbf{G}'}(V, \mathcal{X}'), f^{\mathbf{G}'}) = \tau'(C_1)^{-1} \int_{C_1(F)\backslash C_1(\mathbb{A}_F)} \sum_{\mathcal{X}'_1 \in Fib(\mathcal{X}')}$$

$$S^{\tilde{G}'_1}(\underline{SA}^{\tilde{G}'_1}(V,\mathcal{X}'_1,c^V\tilde{K}'^V_1),\phi^{c_V})\lambda_1(c)\,dc.$$

Notons $\mathcal{X}'_1$ l'élément de $\mathbf{Stab}(\tilde{G}'_1(F))$ paramétrant la classe de conjugaison stable de ϵ_1. On peut remplacer la somme sur $Fib(\mathcal{X}')$ par la somme sur les $\xi\mathcal{X}'_1$ pour $\xi\in C_1(F)$, à condition de diviser par le nombre d'éléments du groupe $Fix(\mathcal{X}'_1)=\{\xi\in C_1(F);\xi\mathcal{X}'_1=\mathcal{X}'_1\}$. Ensuite, par un calcul fait plusieurs fois, la somme en $\xi\in C_1(F)$ et l'intégrale en $c\in C_1(F)\backslash C_1(\mathbb{A}_F)$ se recomposent en une intégrale en $c\in C_1(\mathbb{A}_F)$. On obtient

$$S^{\mathbf{G}'}(\underline{SA}^{\mathbf{G}'}(V,\mathcal{X}'),f^{\mathbf{G}'})=\tau'(C_1)^{-1}|Fix(\mathcal{X}'_1)|^{-1}\int_{C_1(\mathbb{A}_F)}S^{\tilde{G}'_1}(\underline{SA}^{\tilde{G}'_1}(V,\mathcal{X}'_1,c^V\tilde{K}'^V_1),\phi^{c_V})\lambda_1(c)\,dc.$$

Soit $c\in C_1(\mathbb{A}_F)$. Par définition de $\underline{SA}^{\tilde{G}'_1}(V,\mathcal{X}'_1,c^V\tilde{K}'^V_1)$, ce terme est nul sauf si $\mathcal{X}'_1$ est elliptique et $S(\mathcal{X}'_1,c\tilde{K}'_1)\subset V$ (remarquons que cette inclusion ne dépend que des $c_v\tilde{K}'_{1,v}$ pour $v\notin V$). Les conditions analogues $\mathcal{X}'$ elliptique et $S(\mathcal{X}',\tilde{K}')\subset V$ sont satisfaites d'après l'hypothèse sur $(\mu',\omega_{\bar{G}'})$. En revenant à leurs définitions, on voit que ces deux séries d'hypothèses sont équivalentes, à l'exception de la condition (nr3) de 1.6 : en une place $v\notin V$, cette condition pour $\mathcal{X}'$ et $\tilde{K}'_v$ n'implique pas la même condition pour $\mathcal{X}'_1$ et $c_v\tilde{K}'_{1,v}$. Mais on a choisi les $\tilde{K}'_{1,v}$ de sorte que, pour $v\notin V$, (nr3) soit vérifiée pour $c_v=1$. Il résulte alors de [VI] 2.5(13) qu'elle est satisfaite pour tout $v\notin V$ si et seulement si $c^V\in K^V_{C_1}$. La fonction à intégrer est invariante par ce groupe et l'intégrale sur ce groupe disparaît. D'où

$$S^{\mathbf{G}'}(\underline{SA}^{\mathbf{G}'}(V,\mathcal{X}'),f^{\mathbf{G}'})=\tau'(C_1)^{-1}|Fix(\mathcal{X}'_1)|^{-1}\int_{C_1(F_V)}S^{\tilde{G}'_1}(\underline{SA}^{\tilde{G}'_1}(V,\mathcal{X}'_1,\tilde{K}'^V_1),\phi^{c_V})\lambda_1(c_V)\,dc_V$$

$$=\tau'(C_1)^{-1}|Fix(\mathcal{X}'_1)|^{-1}I^{\tilde{G}'_1}(\underline{SA}^{\tilde{G}'_1}(V,\mathcal{X}'_1,\tilde{K}'^V_1),f_1).$$

Restreignons f_1 à un voisinage de la classe de conjugaison stable de ϵ_1. On a défini en [I] 4.8 un homomorphisme de descente d'Harish-Chandra

$$desc^{st}_{\epsilon_1}:SI(\tilde{G}'_1(F_V))\to SI(G'_{1,\epsilon_1}(F_V)).$$

On pose $f_{\epsilon_1}=desc^{st}_{\epsilon_1}(f_1)$. Pour définir correctement l'homomorphisme de descente, il faut en réalité remplacer l'espace de départ, resp. d'arrivée, par un espace de fonctions à support dans un voisinage convenable de ϵ_1, resp. de l'élément neutre. Il est commode de le noter comme ci-dessus tout en se rappelant l'incorrection de cette notation. Concrètement, cela signifie que les intégrales orbitales stables de f_{ϵ_1} n'ont de sens qu'au voisinage de l'élément neutre dans $G'_{1,\epsilon_1}(F_V)$. Cela ne gêne pas pour appliquer à cette fonction une distribution à support unipotent.

En appliquant la définition de 3.2, on obtient

$$S^{\mathbf{G}'}(\underline{SA}^{\mathbf{G}'}(V,\mathcal{X}'),f^{\mathbf{G}'})=\tau'(C_1)^{-1}|Fix(\mathcal{X}'_1)|^{-1}|\Xi^{\Gamma_F}_{\epsilon_1}|^{-1}\tau'(G'_1)$$

$$\tau'(G'_{1,\epsilon_1})^{-1}S^{G'_{1,\epsilon_1}}(SA^{G'_{1,\epsilon_1}}_{unip}(V),f_{\epsilon_1}).$$

Introduisons la fonction $f_{\epsilon,sc}\in SI(G_{\epsilon,SC}(F_V))$ image de f_{ϵ_1} par l'homomorphisme $\iota_{G_{\epsilon,SC},G_{1,\epsilon_1}}$. De la même façon que ci-dessus, les intégrales orbitales stables de $f_{\epsilon,sc}$ n'ont de sens qu'au voisinage de l'élément neutre dans $G_{\epsilon,SC}(F_V)$. Puisque $G'_{\epsilon,SC}$ est simplement connexe, on a $\mathcal{A}_{G'_{\epsilon,SC}}=\{0\}$ donc $\tau'(G'_{\epsilon,SC})=\tau(G'_{\epsilon,SC})$. Ce dernier terme vaut 1 d'après le théorème de Lai ([Lab1] théorème 1.2). En utilisant la proposition 4.6, on obtient

(1) $$S^{\mathbf{G}'}(\underline{SA}^{\mathbf{G}'}(V,\mathcal{X}'),f^{\mathbf{G}'})=\tau'(C_1)^{-1}|Fix(\mathcal{X}'_1)|^{-1}|\Xi^{\Gamma_F}_{\epsilon_1}|^{-1}\tau'(G'_1)S^{G'_{\epsilon,SC}}(SA^{G'_{\epsilon,SC}}_{unip}(V),f_{\epsilon,sc}).$$

D'après le lemme 4.2(i), on a

$$(2) \qquad \tau(C_1)^{-1}\tau(G'_1)=\tau(G').$$

Montrons que

(3) $|Fix(\mathcal{X}'_1)||\Xi_{\epsilon_1}^{\Gamma_F}|=|\Xi_\epsilon^{\Gamma_F}|$.

On rappelle que $\Xi_\epsilon=Z_{G'}(\epsilon)/G'_\epsilon$. Pour $x\in Z_{G'}(\epsilon)$, l'élément $x\epsilon_1x^{-1}$ est un élément de la fibre de G'_1 au-dessus de ϵ, donc de la forme $c\epsilon_1$ pour $c\in C_1$. Cela définit une application $Z_{G'}(\epsilon)\to C_1$. On voit que c'est un homomorphisme. Par ailleurs, le groupe G'_{1,ϵ_1} s'envoie surjectivement sur G'_ϵ et est l'image réciproque de ce groupe dans G'_1. La suite suivante est donc exacte

$$1\to\Xi_{\epsilon_1}\to\Xi_\epsilon\to C_1.$$

D'où aussi une suite exacte

$$1\to\Xi_{\epsilon_1}^{\Gamma_F}\to\Xi_\epsilon^{\Gamma_F}\to C_1(F).$$

Il suffit de montrer que l'image du second homomorphisme est exactement $Fix(\mathcal{X}'_1)$. Soit $x\in Z_{G'}(\epsilon)$ dont l'image dans Ξ_ϵ est fixe par Γ_F. Ecrivons $x\epsilon_1x^{-1}=c\epsilon_1$. La condition sur x implique que $x\epsilon_1x^{-1}$ est stablement conjugué à ϵ_1. Donc $c\in Fix(\mathcal{X}'_1)$. Inversement, si $c\in Fix(\mathcal{X}'_1)$, il existe $u\in G'_1$ tel que $u^{-1}\epsilon_1u=c\epsilon_1$ et $u\sigma(u)^{-1}\in G'_{1,\epsilon_1}$ pour tout $\sigma\in\Gamma_F$. Soit x l'image de u dans G'. La première condition sur u entraîne que x appartient à $Z_{G'}(\epsilon)$ et la seconde condition entraîne que l'image de x dans Ξ_ϵ est fixe par Γ_F. Cela prouve (3).

Montrons que

$$(4) \qquad |\Xi_\epsilon^{\Gamma_F}|=|Fix^{G'}(\mu',\omega_{\bar{G}'})|$$

On utilise la paire de Borel (B_ϵ,T_ϵ) du lemme 1.3 pour construire $(\mu_\epsilon,\omega_\epsilon)$ comme en 1.2. Rappelons que ce couple est égal à $(\mu',\omega_{\bar{G}'})$ par définition de ϵ et (B_ϵ,T_ϵ). A l'aide de la paire (B_ϵ,T_ϵ), on identifie $W^{G'}$ au groupe de Weyl de T_ϵ dans $\mathfrak{g}'$. Il y a donc deux actions galoisiennes sur $W^{G'}$: l'action quasi-déployée notée $\sigma\mapsto\sigma_{G'^*}$ et celle provenant de l'action naturelle sur le normalisateur de T_ϵ, que l'on note $\sigma\mapsto\sigma$. Complètons (B_ϵ,T_ϵ) en une paire de Borel épinglée $\mathcal{E}_\epsilon$. L'action galoisienne $\sigma\mapsto\sigma_{G'^*}=u_{\mathcal{E}_\epsilon}(\sigma)\circ\sigma$ conserve $\mathcal{E}_\epsilon$. Parce que T_ϵ est défini sur F, il en résulte que $u_{\mathcal{E}_\epsilon}(\sigma)$ normalise T_ϵ. Parce que $B_\epsilon\cap G'_\epsilon$ est défini sur F, la cochaîne u_ϵ de la construction de 1.2 est à valeurs dans $T_{\epsilon,sc}$. On voit alors que, parce que $(\mu_\epsilon,\omega_\epsilon)=(\mu',\omega_{\bar{G}'})$, l'image dans $W^{G'}$ de $u_{\mathcal{E}_\epsilon}(\sigma)^{-1}$ est $\omega_{\bar{G}'}(\sigma)$. Il en résulte que, pour $w\in W^{G'}$ et $\sigma\in\Gamma_F$, on a l'égalité $\sigma(w)=\omega_{\bar{G}'}(\sigma)\sigma_{G'^*}(w)\omega_{\bar{G}'}(\sigma)^{-1}$.

Notons N l'ensemble des éléments $n\in G'$ tels que ad_n conserve ϵ et la paire $(B_\epsilon\cap G'_\epsilon,T_\epsilon)$. Il est inclus dans $Z_{G'}(\epsilon)$ et on voit que cette inclusion se quotiente en un isomorphisme

$$N/T_\epsilon\simeq\Xi_\epsilon.$$

Cet isomorphisme identifie $\Xi_\epsilon^{\Gamma_F}$ au sous-groupe des éléments de N/T_ϵ fixes par l'action galoisienne naturelle. D'autre part, N/T_ϵ est un sous-ensemble de $W^{G'}$. On voit que c'est l'ensemble des $w\in W^{G'}$ tels que

- $w(\mu')=\mu'$ (cela traduit la condition que ad_n conserve ϵ) ;

- $w(\Sigma_+(\mu'))=\Sigma_+(\mu')$ (cela traduit la condition que ad_n conserve la paire $(B_\epsilon\cap G'_\epsilon,T_\epsilon)$).

D'après ce que l'on a dit ci-dessus, l'element w est fixe par l'action galoisienne naturelle si et seulement si

- $w=\omega_{\bar{G}'}(\sigma)\sigma_{G'^*}(w)\omega_{\bar{G}'}(\sigma)^{-1}$ pour tout $\sigma\in\Gamma_F$.

Ces trois conditions caractérisent le groupe $Stab^{G'}(\mu',\omega_{\bar{G}'})$, cf. 5.1. D'où (4).

En utilisant (2), (3) et (4), la formule (1) se récrit

$$S^{\mathbf{G}'}(\underline{SA}^{\mathbf{G}'}(V,\mathcal{X}'),f^{\mathbf{G}'})=\tau'(G')|Fix^{G'}(\mu',\omega_{\bar{G}'})|^{-1}S^{G'_{\epsilon,sc}}(SA^{G'_{\epsilon,sc}}_{unip}(V),f_{\epsilon,sc}).$$

Rappelons la formule

$$i(\tilde{G},\tilde{G}',\mu',\omega_{\bar{G}'})=i(\tilde{G},\tilde{G}')|Out(\mathbf{G}')||W^{G'}(\mu')||Fix^{G'}(\mu',\omega_{\bar{G}'})|$$

de 5.1(5) et la définition

$$i(\tilde{G},\tilde{G}')=|Out(\mathbf{G}')|^{-1}|det((1-\theta)_{|\mathfrak{A}_G/\mathfrak{A}_{\tilde{G}}})|^{-1}\tau(G)\tau(G')^{-1}$$

$$|\pi_0((Z(\hat{G})/Z(\hat{G})\cap\hat{T}^{\hat{\theta},0})^{\Gamma_F})|^{-1}|\pi_0(Z(\hat{G})^{\Gamma_F,0}\cap\hat{T}^{\hat{\theta},0})|$$

de [VI] 5.1. Le groupe $W^{G'}(\mu')$ s'identifie à $W^{\bar{H}}$. On a l'égalité $\tau'(G')=covol(\mathfrak{A}_{G',\mathbb{Z}})^{-1}\tau(G')$. On a supposé que l'isomorphisme $\mathfrak{A}_{\tilde{G}}\simeq\mathfrak{A}_{G'}$ préservait les mesures. Il transforme le réseau $\mathfrak{A}_{\tilde{G},\mathbb{Z}}=Hom(X^*(G)^{\Gamma_F,\theta},\mathbb{Z})$ en le réseau $\mathfrak{A}_{G'}$ car, dualement, $Z(\hat{G})^{\Gamma_F,\hat{\theta},0}=Z(\hat{G}')^{\Gamma_F}$. Il en résulte que $covol(\mathfrak{A}_{G',\mathbb{Z}})=covol(\mathfrak{A}_{\tilde{G},\mathbb{Z}})$, avec une définition évidente de ce dernier terme. Posons

$$C(\tilde{G})=|det((1-\theta)_{|\mathfrak{A}_G/\mathfrak{A}_{\tilde{G}}})|^{-1}\tau(G)covol(\mathfrak{A}_{\tilde{G},\mathbb{Z}})^{-1}$$

$$|\pi_0((Z(\hat{G})/Z(\hat{G})\cap\hat{T}^{\hat{\theta},0})^{\Gamma_F})|^{-1}|\pi_0(Z(\hat{G})^{\Gamma_F,0}\cap\hat{T}^{\hat{\theta},0})|.$$

On obtient alors l'égalité

$$(4)\qquad i(\tilde{G},\tilde{G}',\mu',\omega_{\bar{G}'})S^{\mathbf{G}'}(\underline{SA}^{\mathbf{G}'}(V,\mathcal{X}'),f^{\mathbf{G}'})=C(\tilde{G})|W^{\bar{H}}|S^{G'_{\epsilon,sc}}(SA^{G'_{\epsilon,sc}}_{unip}(V),f_{\epsilon,sc}).$$

5.9 Utilisation du théorème [VI] 5.6

On poursuit notre calcul. Les deux groupes $\bar{H}_{SC}$ et $G'_{\epsilon,SC}$ sont en situation d'endoscopie non standard. Plus précisément, notons $j_*:X_{*,\mathbb{Q}}(T^{\bar{H}}_{sc})\to X_{*,\mathbb{Q}}(T_{\epsilon,sc})$ l'isomorphisme déduit du diagramme 5.2(1). Alors $(\bar{H}_{SC},G'_{\epsilon,SC},j_*)$ est un triplet endoscopique non standard. L'hypothèse $\mathcal{X}\not\in\mathbf{Stab}_{excep}(\tilde{G}(F))$ implique que $N(\bar{H}_{SC},G'_{\epsilon,SC},j_*)<dim(G_{SC})$, cf. [III] lemme 6.3. Nos hypothèses de récurrence permettent d'appliquer le théorème [VI] 5.6. On voit aisément que V vérifie les conditions de non-ramification imposées dans cette référence. Il n'y a pas d'isomorphisme entre $SI(G'_{\epsilon,SC}(F_V))$ et $SI(\bar{H}_{SC}(F_V))$ mais il y en a un par contre entre $SI(\mathfrak{g}'_{\epsilon,SC}(F_V))$ et $SI(\bar{\mathfrak{h}}_{SC}(F_V))$. Via l'exponentielle, on déduit de celui-ci un isomorphisme entre deux sous-espaces de $SI(G'_{\epsilon,SC}(F_V))$ et $SI(\bar{H}_{SC}(F_V))$, à savoir les sous-espaces de fonctions à support dans des voisinages convenables des éléments neutres. Comme pour les homomorphismes de descente, il est plus commode de considérer cet isomorphisme comme une correspondance entre $SI(G'_{\epsilon,SC}(F_V))$ et $SI(\bar{H}_{SC}(F_V))$. Introduisons la fonction $\bar{f}_{sc}\in SI(\bar{H}_{SC}(F_V))$ qui correspond ainsi par endoscopie non standard à $f_{\epsilon,sc}\in SI(G'_{\epsilon,SC}(F_V))$. Ses intégrales orbitales stables n'ont de sens qu'au voisinage de l'élément neutre de $\bar{H}_{SC}(F_V)$ mais cela nous suffit. Le théorème [VI] 5.6 transforme l'expression (4) du paragraphe précédent en

$$(1)\qquad i(\tilde{G},\tilde{G}',\mu',\omega_{\bar{G}'})S^{\mathbf{G}'}(\underline{SA}^{\mathbf{G}'}(V,\mathcal{X}'),f^{\mathbf{G}'})=C(\tilde{G})|W^{\bar{H}}|S^{\bar{H}_{SC}}(SA^{\bar{H}_{SC}}_{unip}(V),\bar{f}_{sc}).$$

Si V était réduit à une seule place, la fonction $\bar{f}_{sc}$ serait calculée par la formule [III] 5.2(6). Dans cette référence, le corps de base était non-archimédien. Comme on l'a dit en [V] 4.1, le même calcul vaut sur un corps de base archimédien. Dans ce cas, parce qu'on remonte nos fonctions au revêtement simplement connexe $\bar{H}_{SC}$, l'exponentielle pertubatrice du (ii) du théorème 5.7 disparaît. Le résultat pour notre ensemble fini V de places s'ensuit, en faisant le produit sur tous les $v \in V$. Décrivons-le. Soit $d_V = (d_v)_{v\in V} \in D_V^{rel}$. Puisqu'on a fait disparaître les espaces de mesures, on suppose implicitement fixées des mesures sur les groupes $G_{\eta[d_V]}(F_V)$ et $G_{\eta[d_V],SC}(F_V)$ (le choix fait en 4.1 des mesures de Tamagawa ne vaut pas ici puisque les groupes $G_{\eta[d_V]}$ et $G_{\eta[d_V],SC}$ ne sont pas définis sur F). Elles se déduisent de mesures sur les algèbres de Lie des groupes en question. On a l'isomorphisme

$$\mathfrak{g}_{\eta[d_V]}(F_V) \simeq \mathfrak{z}(\bar{G}; F_V) \oplus \mathfrak{g}_{\eta[d_V],SC}(F_V).$$

Or $Z(\bar{G})^0$ est défini sur F, on munit donc $\mathfrak{z}(\bar{G}; F_V)$ de la mesure de Tamagawa. On suppose que l'isomorphisme ci-dessus est compatible aux mesures. Posons $f[d_V] = desc^{\tilde{G}}_{\eta[d_V]}(f)$, cf. [I] 4.1 pour la définition de l'homomorphisme de descente $desc^{\tilde{G}}_{\eta[d_V]}$. C'est un élément de $I(G_{\eta[d_V]}(F_V), \omega)$. Posons $f[d_V]_{sc} = \iota_{G_{\eta[d_V],SC}, G_{\eta[d_V]}}(f[d_V])$. C'est un élément de $I(G_{\eta[d_V],SC}(F_V))$. On a fixé le facteur de transfert $\Delta[d_V]$ en 5.7 (on supprime l'indice j de cette référence). Notons $\bar{f}[d_V]$ le transfert de $f[d_V]_{sc}$ à $\bar{H}(F_V)$. C'est un élément de $SI(\bar{H}(F_V))$. On note $\bar{f}[d_V]_{sc}$ son image par $\iota_{\bar{H}_{SC},\bar{H}}$. C'est un élément de $SI(\bar{H}_{SC}(F_V))$. Posons

$$c[d_V] = [I_{\eta[d_V]}(F_V) : G_{\eta[d_V]}(F_V)]^{-1}$$

et

$$\delta[d_V] = \prod_{v\in V} \delta[d_v],$$

avec la notation de 5.7 où on supprime les indices j. Fixons un ensemble de représentants $\dot{D}_V^{rel}$ dans D_V^{rel} de l'ensemble de doubles classes

$$I_\eta(\bar{F}_V)\backslash D_V^{rel}/G(F_V).$$

La formule [III] 5.2(6) nous dit que

$$\bar{f}_{sc} = \sum_{d_V \in \dot{D}_V^{rel}} c[d_V]\delta[d_V]\bar{f}[d_V]_{sc}.$$

Plus exactement, les intégrales orbitales stables des deux membres coïncident dans un voisinage de l'élément neutre de $\bar{H}_{SC}(F_V)$.

Remarque. Cette formule, qui est issue de [W1] 3.11, nécessite certaines compatibilités dans nos choix de mesures. Précisément, les mesures sur $G'_\epsilon(F_V)$ et $G'_{\epsilon,SC}(F_V)$ se déduisent l'une de l'autre par le choix d'une mesure sur $\mathfrak{z}(G'_\epsilon; F_V)$; les mesures sur $G_{\eta[d_V]}(F_V)$ et $G_{\eta[d_V],SC}(F_V)$ se déduisent l'une de l'autre par le choix d'une mesure sur $\mathfrak{z}(G_{\eta[d_V]}; F_V)$; les mesures sur $\bar{H}(F_V)$ et $\bar{H}_{SC}(F_V)$ se déduisent l'une de l'autre par le choix d'une mesure sur $\mathfrak{z}(\bar{H}; F_V)$. Alors les mesures sur $\mathfrak{z}(G'_\epsilon; F_V)$, $\mathfrak{z}(G_{\eta[d_V]}; F_V)$ et $\mathfrak{z}(\bar{H}; F_V)$ doivent être compatibles avec l'isomorphisme

$$\mathfrak{z}(G'_\epsilon; F_V) \simeq \mathfrak{z}(G_{\eta[d_V]}; F_V) \oplus \mathfrak{z}(\bar{H}; F_V)$$

déduit du diagramme 5.2(1). Cette compatibilité est assurée par le choix fait ci-dessus des mesures sur $G_{\eta[d_V]}(F_V)$ et $G_{\eta[d_V],SC}(F_V)$ et par le choix des mesures de Tamagawa sur les autres groupes, cf. lemme 4.2(ii).

On a donc

$$S^{\bar{H}_{SC}}(SA^{\bar{H}_{SC}}_{unip}(V),\bar{f}_{sc}) = \sum_{d_V\in \dot{D}_V^{rel}} c[d_V]\delta[d_V]S^{\bar{H}_{SC}}(SA^{\bar{H}_{SC}}_{unip}(V),\bar{f}[d_V]_{sc}).$$

Appliquons la proposition 4.6. Elle se simplifie ici. En effet, puisque $\mathbf{H}$ est une donnée endoscopique elliptique de $\bar{G}_{SC}$, on a $\mathfrak{A}_{\bar{H}} = \mathfrak{A}_{\bar{G}_{SC}} = \{1\}$, donc $\tau'(\bar{H}) = \tau(\bar{H})$. On a de même $\mathfrak{A}_{\bar{H}_{SC}} = \{1\}$, donc $\tau'(\bar{H}_{SC}) = \tau(\bar{H}_{SC}) = 1$ d'après le théorème de Lai ([Lab1] théorème 1.2). On obtient que $\iota^*_{\bar{H}_{SC},\bar{H}}(SA^{\bar{H}_{SC}}_{unip}(V)) = \tau(\bar{H})^{-1}SA^{\bar{H}}_{unip}(V)$. Pour tout $d_V\in\dot{D}_V^{rel}$, on a alors l'égalité

$$S^{\bar{H}_{SC}}(SA^{\bar{H}_{SC}}_{unip}(V),\bar{f}[d_V]_{sc}) = \tau(\bar{H})^{-1}S^{\bar{H}}(SA^{\bar{H}}_{unip}(V),\bar{f}[d_V]).$$

La formule (1) se récrit

$$i(\tilde{G},\tilde{G}',\mu',\omega_{\bar{G}'})S^{\mathbf{G}'}(\underline{SA}^{\mathbf{G}'}(V,\mathcal{X}'),f^{\mathbf{G}'}) = C(\tilde{G})|W^{\bar{H}}|\tau(\bar{H})^{-1}$$
$$\sum_{d_V\in\dot{D}_V^{rel}} c[d_V]\delta[d_V]S^{\bar{H}}(SA^{\bar{H}}_{unip}(V),\bar{f}[d_V]).$$

On a fixé le triplet $(\mathbf{G}',\mu',\omega_{\bar{G}'})\in\mathcal{J}(\mathbf{H})$ au début du paragraphe précédent. Faisons-le varier, en le notant j. Dans la formule ci-dessus, seul le terme $\delta[d_V]$ en dépend, on le note désormais $\delta_j[d_V]$. En reprenant la définition de 5.3, la formule ci-dessus conduit à l'égalité

(2) $$I^{\tilde{G}}(\underline{A}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(V,\mathbf{H},\omega),f) = |W^G(\mu)|^{-1}|Fix^G(\mu,\omega_{\bar{G}})|^{-1}C(\tilde{G})\tau(\bar{H})^{-1}|W^{\bar{H}}|$$
$$\sum_{d_V\in\dot{D}_V^{rel}} c[d_V]S^{\bar{H}}(SA^{\bar{H}}_{unip}(V),\bar{f}[d_V])\sum_{j\in\mathcal{J}(\mathbf{H})}\delta_j[d_V].$$

6 Calculs de facteurs de transfert

6.1 Rappels cohomologiques

Rappelons quelques définitions usuelles. Soient T_1 et T_2 deux tores définis sur F et $\varphi: T_1\to T_2$ un homomorphisme défini sur F. On définit le groupe de cohomologie

$$H^{1,0}(F;T_1\stackrel{\varphi}{\to}T_2) = H^{1,0}(\Gamma_F;T_1(\bar{F})\stackrel{\varphi}{\to}T_2(\bar{F})).$$

On définit le groupe $H^{1,0}(\mathbb{A}_F;T_1\stackrel{\varphi}{\to}T_2)$ comme la limite inductive sur les extensions galoisiennes finies E de F des groupes

$$H^{1,0}(Gal(E/F);T_1(\mathbb{A}_E)\stackrel{\varphi}{\to}T_2(\mathbb{A}_E)).$$

On peut aussi dire qu'en notant $\mathbb{A}_{\bar{F}}$ la limite inductive des $\mathbb{A}_E$, c'est le groupe

$$H^{1,0}(\Gamma_F;T_1(\mathbb{A}_{\bar{F}})\stackrel{\varphi}{\to}T_2(\mathbb{A}_{\bar{F}})).$$

Pour toute place v, on définit le groupe

$$H^{1,0}(F_v;T_1\stackrel{\varphi}{\to}T_2) = H^{1,0}(\Gamma_{F_v};T_1(F_v)\stackrel{\varphi}{\to}T_2(F_v)).$$

Pour une place v finie où T_1 et T_2 sont non ramifiés, on définit

$$H^{1,0}(\mathfrak{o}_v; T_1 \xrightarrow{\varphi} T_2) = H^{1,0}(\Gamma_v^{nr}; T_1(\mathfrak{o}_v^{nr}) \xrightarrow{\varphi} T_2(\mathfrak{o}_v^{nr})),$$

où on rappelle que $\Gamma_v^{nr} = Gal(F_v^{nr}/F_v)$. Il s'envoie injectivement dans $H^{1,0}(F_v; T_1 \xrightarrow{\varphi} T_2)$. Le groupe $H^{1,0}(\mathbb{A}_F; T_1 \xrightarrow{\varphi} T_2)$ est isomorphe au produit restreint des $H^{1,0}(F_v; T_1 \xrightarrow{\varphi} T_2)$, la restriction étant relative aux sous-groupes $H^{1,0}(\mathfrak{o}_v; T_1 \xrightarrow{\varphi} T_2)$ définis pour presque tout v. On définit le groupe $H^{1,0}(\mathbb{A}_F/F; T_1 \xrightarrow{\varphi} T_2)$ comme la limite inductive comme ci-dessus des groupes

$$H^{1,0}(Gal(E/F); T_1(\mathbb{A}_E)/T_1(E) \xrightarrow{\varphi} T_2(\mathbb{A}_E)/T_2(E)).$$

Ou encore comme

$$H^{1,0}(\Gamma_F; T_1(\mathbb{A}_{\bar{F}})/T_1(\bar{F}) \xrightarrow{\varphi} T_2(\mathbb{A}_{\bar{F}})/T_2(\bar{F})).$$

Dans l'appendice C de [KS], Kottwitz et Shelstad définissent une topologie sur ce groupe, qui en fait un groupe localement compact. Ils définissent un accouplement entre ce groupe et le groupe $H^{1,0}(W_F; \hat{T}_2 \xrightarrow{\hat{\varphi}} \hat{T}_1)$. De cet accouplement se déduit un homomorphisme surjectif

$$(1) \qquad H^{1,0}(W_F; \hat{T}_2 \xrightarrow{\hat{\varphi}} \hat{T}_1) \to Hom_{cont}(H^{1,0}(\mathbb{A}_F/F; T_1 \xrightarrow{\varphi} T_2), \mathbb{C}^\times),$$

où, pour deux groupes topologiques X et Y, $Hom_{cont}(X, Y)$ désigne le groupe des homomorphismes continus de X dans Y. Il y a une suite exacte

$$\hat{T}_2^{\Gamma_F} \to \hat{T}_1^{\Gamma_F} \to H^{1,0}(W_F; \hat{T}_2 \xrightarrow{\hat{\varphi}} \hat{T}_1).$$

D'après le lemme C.2.C de [KS], on a

(2) le noyau de (1) est l'image de $\hat{T}_1^{\Gamma_F,0}$ par le second homomorphise de la suite ci-dessus.

Considérons maintenant

- deux autres tores T_1' et T_2' définis sur F et un homomorphisme $\varphi' : T_1' \to T_2'$ défini sur F ;

- deux groupes diagonalisables Z_1 et Z_2 définis sur F et un homomorphisme $\psi : Z_1 \to Z_2$ défini sur F ;

- des diagrammes commutatifs et équivariants pour les actions galoisiennes

$$\begin{array}{ccc} Z_1 & \xrightarrow{\psi} & Z_2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ T_1 & \xrightarrow{\varphi} & T_2 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} Z_1 & \xrightarrow{\psi} & Z_2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ T_1' & \xrightarrow{\varphi'} & T_2' \end{array}$$

On suppose que ces diagrammes sont des quasi-isomorphismes. Cela signifie qu'il s'en déduit des isomorphismes entre groupes de cohomologie, c'est-à-dire entre

- le noyau $ker(\psi)$ et le noyau $ker(\varphi)$, resp. $ker(\varphi')$;

- le conoyau $coker(\psi)$ et le conoyau $coker(\varphi)$, resp. $coker(\varphi')$.

On a alors des homomorphismes naturels

$$\begin{array}{ccccc} & & H^{1,0}(F; Z_1 \xrightarrow{\psi} Z_2) & & \\ & \swarrow & & \searrow & \\ H^{1,0}(F; T_1 \xrightarrow{\varphi} T_2) & & & & H^{1,0}(F; T_1' \xrightarrow{\varphi'} T_2') \end{array}$$

Les deux flèches descendantes sont des isomorphismes. On en déduit un isomorphisme

$$H^{1,0}(F;T_1 \stackrel{\varphi}{\to} T_2) \simeq H^{1,0}(F;T'_1 \stackrel{\varphi'}{\to} T'_2).$$

De même, pour toute place v, on a un isomorphisme

$$H^{1,0}(F_v;T_1 \stackrel{\varphi}{\to} T_2) \simeq H^{1,0}(F_v;T'_1 \stackrel{\varphi'}{\to} T'_2).$$

On vérifie que, pour presque tout v, cet isomorphisme identifie $H^{1,0}(\mathfrak{o}_v;T_1 \stackrel{\varphi}{\to} T_2)$ à $H^{1,0}(\mathfrak{o}_v;T'_1 \stackrel{\varphi'}{\to} T'_2)$. On en déduit un isomorphisme

$$H^{1,0}(\mathbb{A}_F;T_1 \stackrel{\varphi}{\to} T_2) \simeq H^{1,0}(\mathbb{A}_F;T'_1 \stackrel{\varphi'}{\to} T'_2).$$

On a aussi un isomorphisme

$$H^{1,0}(\mathbb{A}_F/F;T_1 \stackrel{\varphi}{\to} T_2) \simeq H^{1,0}(\mathbb{A}_F/F;T'_1 \stackrel{\varphi'}{\to} T'_2).$$

La preuve est plus délicate mais routinière et on la laisse au lecteur. Tous ces isomorphismes sont "fonctoriels" et compatibles aux suites exactes de cohomologie.

6.2 Groupes de cohomologie abélienne

On sait définir les groupes de cohomologie abélienne d'un groupe réductif connexe défini sur F. Ce sont les groupes de cohomologie d'un complexe de tores. Considérons l'exemple de G. Fixons un sous-tore maximal T de G défini sur F. On peut prendre pour complexe $T_{sc} \to T$. Ainsi, on définit $H^0_{ab}(F;G) = H^{1,0}(F;T_{sc} \to T)$, $H^1_{ab}(F;G) = H^{2,1}(F;T_{sc} \to T)$. Les nombres $(i+1,i)$ en exposants indiquent que ces groupes classifient des cocycles qui sont des paires de cochaînes, la première étant de degré $i+1$ à valeurs dans T_{sc}, la seconde étant de degré i à valeurs dans T. On définit de même les groupes $H^i_{ab}(F_v;G)$ pour $v \in Val(F)$, $H^i_{ab}(\mathbb{A}_F;G)$ et $H^i_{ab}(\mathbb{A}_F/F;G)$. Le choix du tore T n'importe pas. Plus généralement, introduisons <u>le</u> tore T^* de G, muni de l'action quasi-déployée et fixons un cocycle $\omega_{T'} : \Gamma_F \to W$. Définissons le tore T' comme étant égal à T^*, mais muni de l'action galoisienne $\sigma \mapsto \omega_{T'}(\sigma) \circ \sigma_{G^*}$. On définit aussi T'_{sc} comme étant égal à T^*_{sc} muni de l'action précédente. Le tore T' n'a pas de raison d'être isomorphe à un sous-tore de G mais les considérations du paragraphe précédent montrent que l'on peut aussi bien définir les groupes de cohomologie abélienne de G à l'aide du complexe $T'_{sc} \to T'$. En effet, les complexes $T_{sc} \to T$ et $T'_{sc} \to T'$ sont tous deux quasi-isomorphes au complexe $Z(G_{SC}) \to Z(G)$.

Soit $v \in Val(F) - V$. On peut choisir un sous-tore maximal T_v de G défini sur F_v et non ramifié. On définit alors

$$H^i_{ab}(\mathfrak{o}_v;G) = H^{i+1,i}(\mathfrak{o}_v;T_{sc,v} \to T_v).$$

Cela ne dépend pas du choix de T_v. Rappelons que $H^0_{ab}(F_v;G)$ s'identifie à $G(F_v)/\pi(G_{SC}(F_v))$. On a $H^1_{ab}(\mathfrak{o}_v;G) = \{0\}$ tandis que $H^0_{ab}(\mathfrak{o}_v;G)$ est l'image naturelle de $T_v(\mathfrak{o}_v)$ dans $H^0_{ab}(F_v;G)$ ([KS] lemme C.1.A). L'assertion 1.5(2) peut se reformuler ainsi

(1) $H^0_{ab}(\mathfrak{o}_v;G)$ est l'image naturelle de K_v dans $H^0_{ab}(F_v;G)$.

On notera plus simplement $G_{ab}(F_v) = H^0_{ab}(F_v;G)$ et $G_{ab}(\mathfrak{o}_v) = H^0_{ab}(\mathfrak{o}_v;G)$.

La définition des groupes de cohomologie abélienne s'étend aux groupes non connexes mais quasi-connexes, cf. [Lab2] 1.6. Il faut dans ce cas utiliser des complexes de tores de longueur 3. Considérons par exemple un élément semi-simple $\gamma \in \tilde{G}(F)$, posons $I_\gamma = Z(G)^\theta G_\gamma$. Fixons un sous-tore maximal $T_\natural$ de G_γ, notons T son commutant dans G et $T_{\natural,sc}$ l'image réciproque de $T_\natural$ dans $G_{\gamma,SC}$. Alors les groupes de cohomologie abélienne de I_γ sont définis à l'aide du complexe $T_{\natural,sc} \to T \stackrel{1-\theta}{\to} (1-\theta)(T)$. Par exemple, $H^1_{ab}(F; I_\gamma) = H^{2,1,0}(F; T_{\natural,sc} \to T \stackrel{1-\theta}{\to} (1-\theta)(T))$. L'homomorphisme de complexes

$$\begin{array}{ccccc} Z(G_{\gamma,SC}) & \to & Z(I_\gamma) & \stackrel{1-\theta}{\to} & (1-\theta)(Z(G)) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ T_{\natural,sc} & \to & T & \stackrel{1-\theta}{\to} & (1-\theta)(T) \end{array}$$

est un quasi-isomorphisme, c'est-à-dire qu'il s'en déduit des isomorphismes entre groupes de cohomologie.Les considérations du paragraphe précédent s'étendent aux complexes de longueur finie quelconque, avec les mêmes conséquences. Identifions W^{G_γ} au groupe de Weyl de $T_\natural$ dans G_γ et fixons un cocycle $\omega_{T'} : \Gamma_F \to W^{G_\gamma}$. Définissons le tore T' comme étant égal à T, muni de l'action galoisienne $\sigma \mapsto \omega_{T'} \circ \sigma$. On définit de même les tores $T'_\natural$ et $T'_{\natural,sc}$. Alors on peut aussi bien définir les groupes de cohomologie abélienne de I_γ à l'aide du complexe de tores $T'_{\natural,sc} \to T' \stackrel{1-\theta}{\to} (1-\theta)(T')$.

6.3 Un lemme de densité

Il y a un homomorphisme naturel de $H^0_{ab}(F; G)$ dans $H^0(\mathbb{A}_F; G)$ dont on note l'image $Im(H^0_{ab}(F; G))$. Cette image est discrète pour la topologie naturelle de $H^0(\mathbb{A}_F; G)$ ([KS] lemme C.3.A). D'autre part, pour toute place v, il y a un homomorphisme naturel $G(F_v) \to G_{ab}(F_v) = H^0_{ab}(F_v; G)$. Il est continu et ouvert. Il est surjectif si v est finie. L'assertion 6.2(1) montre qu'il s'en déduit un homomorphisme $G(\mathbb{A}_F) \to H^0_{ab}(F; G)$. Plus précisément, notons V_∞ l'ensemble des places archimédiennes de F. En définissant de façon évidente le groupe $H^0_{ab}(\mathbb{A}_F^{V_\infty}; G)$, l'assertion 6.2(1) montre que l'homomorphisme $G(\mathbb{A}_F^{V_\infty}) \to H^0_{ab}(\mathbb{A}_F^{V_\infty}; G)$ est continu, ouvert et surjectif.

Lemme. *L'homomorphisme*

$$G(\mathbb{A}_F) \to H^0_{ab}(\mathbb{A}_F; G)/Im(H^0_{ab}(F; G))$$

est continu, ouvert et surjectif.

Preuve. Le fait qu'il soit continu et ouvert résulte de ce que l'on a dit ci-dessus. D'après le lemme C.5.A de [KS], la projection de $Im(H^0_{ab}(F; G))$ dans $\prod_{v \in V_\infty} H^0_{ab}(F_v; G)$ est dense. Il revient au même de dire que l'image de $H^0_{ab}(\mathbb{A}_F^{V_\infty}; G)$ dans $H^0_{ab}(\mathbb{A}_F; G)/Im(H^0_{ab}(F; G))$ est dense, ou encore que l'image de $G(\mathbb{A}_F^{V_\infty})$ dans ce quotient est dense. A fortiori, l'homomorphisme de l'énoncé est d'image dense. Cette image étant un sous-groupe ouvert, cela entraîne que cette image est le groupe $H^0_{ab}(\mathbb{A}_F; G)/Im(H^0_{ab}(F; G))$ tout entier. $\square$

6.4 Fibres de la descente

On conserve la donnée $\mathbf{H} = (\bar{H}, \bar{\mathcal{H}}, \bar{s}) \in E_{\hat{\bar{T}}_{ad},\star}(\bar{G}, V)$ fixée en 5.3, soumise à la condition $D_v^{rel} \neq \emptyset$ pour tout $v \in V$ posée en 5.6. On veut décrire l'ensemble $\mathcal{J}(\mathbf{H})$.

On a fixé en 5.2 des paires de Borel des groupes $\hat{\bar{G}}$ et $\hat{\bar{H}}$. On peut identifier le tore $\hat{\bar{T}}$ de la première paire à $\hat{T}/(1-\hat{\theta})(\hat{T})$ et celui de la seconde à $\hat{\bar{T}}_{ad} = \hat{\bar{T}}/Z(\hat{\bar{G}})$. Les actions galoisiennes sur ces tores sont de la forme $\sigma \mapsto \sigma_{\bar{G}} = \omega_{\bar{G}}(\sigma)\sigma_{G^*}$ et $\sigma \mapsto \sigma_{\bar{H}} = \omega_{\bar{H}}(\sigma)\sigma_{\bar{G}}$, où $\omega_{\bar{G}}$ est un cocycle à valeurs dans W^θ et $\omega_{\bar{H}}$ est un cocycle à valeurs dans $W^{\bar{G}}$. On a fixé en 5.6 une paire de Borel $(B_{\bar{H}}, S_{\bar{H}})$ de $\bar{H}$. On peut identifier le tore dual $\hat{S}_{\bar{H}}$ à $\hat{\bar{T}}_{ad}$ muni d'une action galoisienne $\sigma_S = \omega_{S,\bar{H}}(\sigma)\sigma_{\bar{H}}$, où $\omega_{S,\bar{H}}$ est un cocycle de Γ_F dans $W^{\bar{H}}$. On pose

$$\omega_S(\sigma) = \omega_{S,\bar{H}}(\sigma)\omega_{\bar{H}}(\sigma)\omega_{\bar{G}}(\sigma).$$

On vérifie que $\omega_S : \Gamma_F \to W^\theta$ est un cocycle pour l'action quasi-déployée $\sigma \mapsto \sigma_{G^*}$ de Γ_F sur W^θ. Introduisons le tore $\hat{S}$ isomorphe à $\hat{T}$, muni de l'action galoisienne $\sigma_S = \omega_S(\sigma)\sigma_{G^*}$. Alors $\hat{S}_{\bar{H}}$ s'identifie à $(\hat{S}/(1-\hat{\theta})(\hat{S}))/Z(\hat{\bar{G}})$. On fixe des χ-data pour l'ensemble des racines du tore $\hat{S}^{\hat{\theta},0}$ dans $\hat{G}^{\hat{\theta},0}$, définies sur F. On définit comme dans le cas local (cf. [I] 2.2) une cochaîne

$$\begin{array}{ccc} W_F & \to & \hat{G}_{SC}^{\hat{\theta}} \\ w & \mapsto & \hat{r}_S(w)\hat{n}_G(\omega_S(w)) \end{array}$$

D'après [LS] paragraphe 2.6, c'est un cocycle. Il prend ses valeurs dans le normalisateur de $\hat{T}$ dans $\hat{G}_{SC}^{\hat{\theta}}$. En le poussant en un cocycle à valeurs dans W^θ, on obtient ω_S (relevé en un cocycle défini sur W_F).

Considérons un élément $(\mathbf{G}', \mu', \omega_{\bar{G}'}) \in \mathcal{J}(\bar{H})$. On écrit $\mathbf{G}' = (G', \mathcal{G}', s\hat{\theta})$. On se rappelle que $\omega_{\bar{G}'}(\sigma)\omega_{G'}(\sigma) = \omega_{\bar{H}}(\sigma)\omega_{\bar{G}}(\sigma)$ et que $W^{\bar{H}} = W^{G'}(\mu')$. On pose $\omega_{S,G'}(\sigma) = \omega_{S,\bar{H}}(\sigma)\omega_{\bar{G}'}(\sigma)$. On vérifie que $\omega_{S,G'}$ est un cocycle de W_F dans $W^{G'}$ (muni de l'action galoisienne provenant de G'). Le tore $\hat{S}^{\hat{\theta},0}$ s'identifie au sous-tore maximal $\hat{T}' = \hat{T}^{\hat{\theta},0}$ de $\hat{G}'$. Par cette identification, l'action $\sigma \mapsto \sigma_S$ coïncide avec $\sigma \mapsto \omega_{S,G'}(\sigma)\sigma_{G'}$. Comme dans le cas local, des χ-data que l'on a fixées se déduisent de telles données pour l'ensemble des racines du tore $\hat{S}^{\hat{\theta},0}$ dans le groupe $\hat{G}'$. On définit comme ci-dessus le cocycle

$$\begin{array}{ccc} W_F & \to & \hat{G}'_{SC} \\ w & \mapsto & \hat{r}_{S,G'}(w)\hat{n}_{G'}(\omega_{S,G'}(w)). \end{array}$$

Pour $w \in W_F$, on fixe un élément $g_w = (g(w), w) \in \mathcal{G}'$ tel que ad_{g_w} coïncide avec $w_{G'}$ sur $\hat{G}'$. On pose

$$t_S(w) = \hat{r}_S(w)\hat{n}_G(\omega_S(w))g(w)^{-1}\hat{n}_{G'}(\omega_{S,G'}(w))^{-1}\hat{r}_{S,G'}(w)^{-1}.$$

C'est une cochaîne à valeurs dans $\hat{S}$. Ce n'est pas forcément un cocycle, mais son image $\underline{t}_S : W_F \to \hat{S}/\hat{S}^{\hat{\theta},0}$ en est un, parce que $g(w)$ est bien déterminé modulo $\hat{T}^{\hat{\theta},0}$. Pour la même raison, ce cocycle ne dépend pas du choix de g_w, ni de celui des épinglages nécessaires pour définir les sections de Springer. Notons $\underline{s}$ l'image de s dans $\hat{S}_{ad} = \hat{S}/Z(\hat{G}) \simeq \hat{T}_{ad}$. On vérifie que le couple $(\underline{t}_S, \underline{s})$ est un élément de $Z^{1,0}(W_F; \hat{S}/\hat{S}^{\hat{\theta},0} \stackrel{1-\hat{\theta}}{\to} \hat{S}_{ad})$. Posons

$$P = H^{1,0}(W_F; \hat{S}/\hat{S}^{\hat{\theta},0} \stackrel{1-\hat{\theta}}{\to} \hat{S}_{ad})$$

et notons encore $(\underline{t}_S,\underline{s})$ la classe dans P du cocycle précédent. On a ainsi défini une application

$$\begin{array}{rccc}\mathbf{p}: & \mathcal{J}(\mathbf{H}) & \to & P\\ & j=(\mathbf{G}',\mu',\omega_{\bar{G}'}) & \mapsto & \mathbf{p}(j)=(\underline{t}_S,\underline{s}).\end{array}$$

L'ensemble $\mathcal{E}_{\hat{T}}(\tilde{G},\omega,V)$ est un ensemble de représentants de données endoscopiques modulo $\hat{T}$-équivalence. Evidemment, l'application ci-dessus peut se définir sur toutes les données et pas seulement sur un ensemble de représentants. Montrons qu'alors, elle se quotiente par cette $\hat{T}$-équivalence. En effet, remplaçons la donnée $\mathbf{G}'$ précédente par une donnée $\hat{T}$-équivalente. Cette nouvelle donnée est de la forme $(G',x\mathcal{G}'x^{-1},xs\hat{\theta}(x)^{-1}z)$, avec $x\in\hat{T}$ et $z\in Z(\hat{G})$. L'ensemble $Stab(\tilde{G}'(F))$ ne change pas et le couple $(\mu',\omega_{\bar{G}'})$ est encore un élément de cet ensemble. Dans les constructions précédentes, on peut remplacer le cocycle $w\mapsto\hat{r}_{S,G'}(w)\hat{n}_{G'}(\omega_{S,G'}(w))$ par $w\mapsto x\hat{r}_{S,G'}(w)\hat{n}_{G'}(\omega_{S,G'}(w))x^{-1}$ et g_w par xg_wx^{-1}, donc $g(w)$ par $xg(w)w_G(x)^{-1}$. Cela remplace $t_S(w)$ par

$$\hat{r}_S(w)\hat{n}_G(\omega_S(w))w_G(x)g(w)^{-1}\hat{n}_{G'}(\omega_{S,G'}(w))^{-1}\hat{r}_{S,G'}(w)^{-1}x^{-1}.$$

On a $\hat{r}_S(w)\hat{n}_G(\omega_S(w))\circ w_G=w_S$ sur $\hat{T}$, donc le terme précédent est $w_S(x)t_S(w)x^{-1}$. Evidemment, $\underline{s}$ est remplacé par $(1-\hat{\theta})(x)\underline{s}$. Mais le couple formé du cocycle $w\mapsto w_S(x)\underline{t}_S(w)x^{-1}$ et de l'élément $(1-\hat{\theta})(x)\underline{s}$ est cohomologue à $(\underline{t}_S,\underline{s})$, ce qui démontre l'assertion.

On a des homomorphismes naturels

$$P=H^{1,0}(W_F;\hat{S}/\hat{S}^{\hat{\theta},0}\stackrel{1-\hat{\theta}}{\to}\hat{S}_{ad})\to H^0(W_F;\hat{S}_{ad}/(1-\hat{\theta})(\hat{S}_{ad}))\to H^0(W_F;\hat{S}_{\bar{H}})=\hat{S}_{\bar{H}}^{\Gamma_F}.$$

On note $\mathbf{p}_1$ leur composé.

Le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} & & 1\\ & & \downarrow\\ 1 & \to & Z(\hat{G})\\ \downarrow & & \downarrow\\ \hat{S}/\hat{S}^{\hat{\theta},0} & \stackrel{1-\hat{\theta}}{\to} & \hat{S}\\ \downarrow & & \downarrow\\ \hat{S}/\hat{S}^{\hat{\theta},0} & \stackrel{1-\hat{\theta}}{\to} & \hat{S}_{ad}\\ \downarrow & & \downarrow\\ 1 & & 1\end{array}$$

fournit un homomorphisme naturel

$$\mathbf{p}_2':P=H^{1,0}(W_F;\hat{S}/\hat{S}^{\hat{\theta},0}\stackrel{1-\hat{\theta}}{\to}\hat{S}_{ad})\to H^1(W_F;Z(\hat{G})),$$

puis

$$\mathbf{p}_2:P\to H^1(W_F;Z(\hat{G}))/ker^1(W_F;Z(\hat{G})).$$

Soit $v\in Val(F)-V$, notons I_v le groupe d'inertie de Γ_{F_v}. C'est aussi un sous-groupe de W_{F_v}. Remarquons que l'on n'a pas supposé que le tore S était non ramifié hors de V.

On a un diagramme

$$\begin{array}{ccc} & & (\hat{S}_{sc}/(1-\hat{\theta})(\hat{S}_{sc}))^{I_v} \\ & & \| \\ & & H^{1,0}(I_v;\hat{S}_{sc}/\hat{S}_{sc}^{\hat{\theta}} \stackrel{1-\hat{\theta}}{\to} \hat{S}_{sc}) \\ & & \downarrow \varphi_v \\ P = H^{1,0}(W_F;\hat{S}/\hat{S}^{\hat{\theta},0} \stackrel{1-\hat{\theta}}{\to} \hat{S}_{ad}) & \stackrel{res_{I_v}}{\to} & H^{1,0}(I_v;\hat{S}/\hat{S}^{\hat{\theta},0} \stackrel{1-\hat{\theta}}{\to} \hat{S}_{ad}). \end{array}$$

On a noté comme toujours $\hat{S}_{sc}$ l'image réciproque de $\hat{S}$ dans $\hat{G}_{SC}$. Son groupe de points fixes $\hat{S}_{sc}^{\hat{\theta}}$ est connexe et l'homomorphisme $1-\hat{\theta}$ est injectif sur $\hat{S}_{sc}/\hat{S}_{sc}^{\hat{\theta}}$. L'isomorphisme du haut en résulte, par la suite exacte de [KS] p.119. L'homomorphisme res_{I_v} est la restriction.

On note $P(\mathbf{H})$ l'ensemble des $p\in P$ tels que

- $\mathbf{p}_1(p)=\bar{s}$;
- $\mathbf{p}_2(p)=\mathbf{a}$;
- pour tout $v\not\in V$, $res_{I_v}(p)$ appartient à l'image de φ_v.

Proposition. *L'application* $\mathbf{p}$ *est injective. Son image est* $P(\mathbf{H})$.

Preuve. On commence par prouver l'injectivité. Considérons deux éléments $(\mathbf{G}'_1,\mu'_1,\omega_{\bar{G}'_1})$ et $(\mathbf{G}'_2,\mu'_2,\omega_{\bar{G}'_2})$ de $\mathcal{J}(\mathbf{H})$ ayant même image par $\mathbf{p}$. On affecte les termes attachés à chacune des données d'un indice 1 ou 2. Les deux cocycles $(\underline{t}_{S,1},\underline{s}_1)$ et $(\underline{t}_{S,2},\underline{s}_2)$ sont cohomologues. On a prouvé que remplacer la donnée $\mathbf{G}'_2$ par une donnée $\hat{T}$-équivalente remplaçait le cocycle $(\underline{t}_{S,2},\underline{s}_2)$ par un cocycle cohomologue. En reprenant la preuve, on voit qu'à l'inverse, on peut remplacer $\mathbf{G}'_2$ par une donnée $\hat{T}$-équivalente de sorte que les deux cocycles $(\underline{t}_{S,1},\underline{s}_1)$ et $(\underline{t}_{S,2},\underline{s}_2)$ soient égaux. Alors les images de s_1 et s_2 dans $\hat{T}_{ad}$ sont égales. A équivalence près, on peut supposer $s_1=s_2$. Alors $\hat{G}'_1=\hat{G}'_2$. Notons simplement $\hat{G}'$ ce groupe. Pour $\sigma\in\Gamma_F$, on a l'égalité

$$\omega_{\bar{G}'_1}(\sigma)\omega_{G'_1}(\sigma)\sigma_{G^*}=\omega_{\bar{G}'_2}(\sigma)\omega_{G'_2}(\sigma)\sigma_{G^*}$$

parce que chacun des deux termes est égal à $\omega_{\bar{H}}(\sigma)\omega_{\bar{G}}(\sigma)\sigma_{G^*}$. Mais, pour $i=1,2$, $\omega_{G'_i}(\sigma)\sigma_{G^*}$ conserve l'ensemble des racines positives de $\hat{T}^{\hat{\theta},0}$ dans $\hat{G}'$, tandis que $\omega_{\bar{G}'_i}(\sigma)$ appartient à $W^{G'}$. Une décomposition en produits de termes vérifiant ces propriétés est unique. D'où les égalités

$$(1)\qquad \omega_{\bar{G}'_1}=\omega_{\bar{G}'_2} \text{ et } \omega_{G'_1}=\omega_{G'_2}.$$

La seconde égalité signifie que l'égalité $\hat{G}'_1=\hat{G}'_2$ est compatible aux actions galoisiennes. Dualement, on peut supposer $G'_1=G'_2$. Pour $w\in W_F$, les termes qui interviennent dans la construction de $\underline{t}_{S,1}(w)$ et $\underline{t}_{S,2}(w)$ sont égaux, à l'exception peut-être de $g_1(w)$ et $g_2(w)$. L'égalité $\underline{t}_{S,1}(w)=\underline{t}_{S,2}(w)$ entraîne donc que $g_2(w)\in\hat{T}^{\hat{\theta},0}g_1(w)$ pour tout $w\in W_F$. Donc $g_{w,2}\in\hat{G}'g_{1,w}$. Pour $i=1,2$, $\mathcal{G}'_i$ est engendré par $\hat{G}'$ et les $g_{w,i}$ pour $w\in W_F$. Donc $\mathcal{G}'_1=\mathcal{G}'_2$. Cela prouve que, quitte à remplacer $\mathbf{G}'_2$ par un élément $\hat{T}$-équivalent, on a l'égalité $\mathbf{G}'_1=\mathbf{G}'_2$. Puisque les deux éléments de départ appartiennent à un ensemble de représentants modulo $\hat{T}$-équivalence, ces deux éléments de départ sont en fait égaux. Enfin, on a l'égalité $\mu'_1=\mu'_2=\mu$. D'où, grâce à (1), $(\mathbf{G}'_1,\mu'_1,\omega_{\bar{G}'_1})=(\mathbf{G}'_2,\mu'_2,\omega_{\bar{G}'_2})$. Cela prouve l'injectivité de $\mathbf{p}$.

Montrons maintenant que $\mathbf{p}(\mathcal{J}(\mathbf{H})) \subset P(\mathbf{H})$. Soit $j = (\mathbf{G}', \mu', \omega_{\bar{G}'}) \in \mathcal{J}(\mathbf{H})$. On écrit $\mathbf{G}' = (G', \mathcal{G}', s\hat{\theta})$. On lui associe le cocycle $p = (\underline{t}_S, \underline{s})$. Le fait que $\mathbf{p}_1(p) = \bar{s}$ est immédiat.

Concrètement, l'image $z = \mathbf{p}_2'(p)$ se construit ainsi. Le cocycle $(\underline{t}_S, \underline{s})$ se relève en la cochaîne $(\underline{t}_S, s)$. Le cocycle $z : W_F \to Z(\hat{G})$ est défini par

$$(1-\hat{\theta})(\underline{t}_S(w)) = w_S(s)s^{-1}z(w).$$

Parce que $\hat{r}_S(w)\hat{n}_G(\omega_S(w))$ est fixe par $\hat{\theta}$, on a

$$(1-\hat{\theta})(\underline{t}_S(w)) = \hat{\theta}\left(\hat{r}_{S,G'}(w)\hat{n}_{G'}(\omega_{S,G'}(w))g(w)\right) g(w)^{-1}\hat{n}_{G'}(\omega_{S,G'}(w))^{-1}\hat{r}_{S,G'}(w)^{-1}$$

$$= s^{-1}s\hat{\theta}\left(\hat{r}_{S,G'}(w)\hat{n}_{G'}(\omega_{S,G'}(w))\right) s^{-1}s\hat{\theta}(g(w))g(w)^{-1}\hat{n}_{G'}(\omega_{S,G'}(w))^{-1}\hat{r}_{S,G'}(w)^{-1}.$$

Parce que $\hat{r}_{S,G'}(w)\hat{n}_{G'}(\omega_{S,G'}(w)) \in \hat{G}'$, ce terme est fixe par $ad_s \circ \hat{\theta}$. D'autre part, on a une égalité

$$s\hat{\theta}(g(w)) = a(w)g(w)w_{G^*}(s),$$

où a est un cocycle à valeurs dans $Z(\hat{G})$, d'image $\mathbf{a}$ dans $H^1(W_F; Z(\hat{G}))/ker^1(W_F; Z(\hat{G}))$. On obtient

$$(1-\hat{\theta})(\underline{t}_S(w)) = a(w)s^{-1}\hat{r}_{S,G'}(w)\hat{n}_{G'}(\omega_{S,G'}(w))g(w)w_{G^*}(s)g(w)^{-1}$$
$$\hat{n}_{G'}(\omega_{S,G'}(w))^{-1}\hat{r}_{S,G'}(w)^{-1}.$$

Mais

$$ad_{\hat{n}_{G'}(\omega_{S,G'}(w))g(w)} \circ w_{G^*} = w_S.$$

D'où

$$(1-\hat{\theta})(\underline{t}_S(w)) = a(w)s^{-1}w_S(s).$$

Alors le cocycle z est égal à a. Il s'ensuit que $\mathbf{p}_2(p) = \mathbf{a}$.

Soit $v \in Val(F) - V$. Pour $w \in I_v$, on peut prendre $g(w) = 1$ puisque $\mathbf{G}'$ est non ramifié en v. Alors les termes intervenant dans la définition de $t_S(w)$ appartiennent tous à $\hat{G}_{SC}$. On peut considérer t_S comme une cochaîne à valeurs dans $\hat{S}_{sc}$. C'est encore un cocycle. On en déduit un cocycle encore noté $\underline{t}_S$ à valeurs dans $\hat{S}_{sc}/\hat{S}_{sc}^{\hat{\theta}}$. On fixe un élément $s_{sc} \in \hat{S}_{sc}$ ayant même image que s dans $\hat{S}_{ad}$. Le même calcul que ci-dessus montre que le couple $(\underline{t}_S, s_{sc})$ est un cocycle et définit un élément de $H^{1,0}(I_v; \hat{S}_{sc}/\hat{S}_{sc}^{\hat{\theta}} \stackrel{1-\hat{\theta}}{\to} \hat{S}_{sc})$. Il est clair que $res_{I_v}(\underline{t}_S, \underline{s})$ est l'image par φ_v de ce cocycle. Cela achève de prouver que $p = (\underline{t}_S, \underline{s})$ appartient à $P(\mathbf{H})$.

Réciproquement, soit $p \in P(\mathbf{H})$. On représente p par un cocycle $(\underline{t}_S, \underline{s})$. On relève $\underline{s}$ en un élément $s \in \hat{T}$. On pose $\hat{G}' = Z_{\hat{G}}(s\hat{\theta})^0$. On munit ce groupe d'une paire de Borel épinglée dont la paire sous-jacente soit $(\hat{B} \cap \hat{G}', \hat{T}^{\hat{\theta},0})$.

Parce que $\hat{S}^{\hat{\theta},0}$ est connexe, l'homomorphisme

$$H^1(W_F; \hat{S}) \to H^1(W_F; \hat{S}/\hat{S}^{\hat{\theta},0})$$

est surjectif, cf. [Lan] p. 719 (1). On relève $\underline{t}_S$ en un cocycle t_S à valeurs dans $\hat{S}$. Pour $w \in W_F$, posons

$$u(w) = t_S(w)^{-1}\hat{r}_S(w)\hat{n}_G(\omega_S(w)),$$

puis $u_w = (u(w), w) \in {}^LG$. On vérifie que $w \mapsto u_w$ est un homomorphisme de W_F dans ${}^LG$. Parce que $\mathbf{p}_2(p) = \mathbf{a}$, il existe un cocycle $a : W_F \to Z(\hat{G})$, dont l'image dans $H^1(W_F; Z(\hat{G}))/ker^1(F, Z(\hat{G}))$ est $\mathbf{a}$, tel que

$$(2) \qquad (1-\hat{\theta})(t_S(w)) = w_S(s)s^{-1}a(w)$$

pour tout $w \in W_F$. Montrons que l'on a

(3) $s\hat{\theta}(u(w))w_{G^*}(s)^{-1} = a(w)u(w)$ pour tout $w \in W_F$.

Parce que $\hat{r}_S(w)\hat{n}_G(\omega_S(w))$ est fixe par $\hat{\theta}$, on a

$$s\hat{\theta}(u(w))w_{G^*}(s)^{-1} = s\hat{\theta}(t_S(w))^{-1}\hat{r}_S(w)\hat{n}_G(\omega_S(w))w_{G^*}(s)^{-1}.$$

Parce que $w_S = ad_{\hat{r}_S(w)\hat{n}_G(\omega_S(w))} \circ w_{G^*}$, on obtient

$$s\hat{\theta}(u(w))w_{G^*}(s)^{-1} = s\hat{\theta}(t_S(w))^{-1}w_S(s)^{-1}\hat{r}_S(w)\hat{n}_G(\omega_S(w)).$$

En utilisant (2), on obtient

$$s\hat{\theta}(u(w))w_{G^*}(s)^{-1} = a(w)t_S(w)^{-1}\hat{r}_S(w)\hat{n}_G(\omega_S(w)) = a(w)u(w).$$

Cela prouve (3).

La relation (3) entraîne aisément que ad_{u_w} normalise $Z_{\hat{G}}(s\hat{\theta})$, donc aussi sa composante neutre $\hat{G}'$. Alors l'ensemble $\hat{G}'\{u_w; w \in W_F\}$ est un groupe. Notons-le $\mathcal{G}'$. On a la suite exacte

$$1 \to \hat{G}' \to \mathcal{G}' \to W_F \to 1$$

qui est scindée par l'homomorphisme u. Comme toujours, pour $w \in W_F$, on peut fixer un élément $g_w \in \hat{G}'u_w$ tel que ad_{g_w} conserve l'épinglage fixé de $\hat{G}'$. Alors $w \mapsto ad_{g_w}$ munit $\hat{G}'$ d'une action galoisienne préservant l'épinglage. On introduit le groupe réductif connexe G' sur F, quasi-déployé, tel que $\hat{G}'$, muni de son action galoisienne, soit le groupe dual de G'. La relation (3) montre que $\mathbf{G}' = (G', \mathcal{G}', s\hat{\theta})$ est une donnée endoscopique pour $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$.

Montrons que

(4) cette donnée endoscopique est non ramifiée hors de V.

Soit $v \not\in V$. On sait $res_{I_v}(p)$ appartient à l'image de φ_v. Fixons un cocycle $(\underline{t}'_{S,sc}, s'_{sc}) \in H^{1,0}(I_v; \hat{S}_{sc}/\hat{S}_{sc}^{\hat{\theta}} \stackrel{1-\hat{\theta}}{\to} \hat{S}_{sc})$ tel que $res_{I_v}(p) = \varphi_v(\underline{t}'_{S,sc}, s'_{sc})$. Cela signifie qu'il existe $x \in \hat{S}$ tel que l'on ait $s \in Z(\hat{G})xs'_{sc}$ et $\underline{t}_S(w) = \underline{t}'_{S,sc}(w)w_S(x)x^{-1}$ pour tout $w \in I_v$ (en identifiant un élément de G_{SC} à son image dans G). On écrit $x = zx_{sc}$, avec $x_{sc} \in \hat{S}_{sc}$ et $z \in Z(\hat{G})$. On remplace $(\underline{t}'_{S,sc}, s'_{sc})$ par le cocycle cohomologue $(\underline{t}_{S,sc}, s_{sc})$ défini par $\underline{t}_{S,sc}(w) = \underline{t}'_{S,sc}(w)w_S(x_{sc})x_{sc}^{-1}$ et $s_{sc} = s'_{sc}x_{sc}$. Les relations deviennent $s \in Z(\hat{G})s_{sc}$ et $\underline{t}_S(w) = \underline{t}_{S,sc}(w)w_S(z)z^{-1}$ pour $\sigma \in I_v$. Mais toutes les actions galoisiennes coïncident sur $Z(\hat{G})$. Elles y sont non ramifiées en v puisque $v \not\in V_{ram}$. Donc $w_S(z) = z$ pour $w \in I_v$ et on a simplement $\underline{t}_S(w) = \underline{t}_{S,sc}(w)$ pour $w \in I_v$. Parce que $\hat{S}_{sc}^{\hat{\theta}}$ est connexe, le résultat de [Lan] cité ci-dessus permet de relever $\underline{t}_{S,sc}$ en un cocycle $t_{S,sc}$ à valeurs dans $\hat{S}_{sc}$. En se rappelant que le terme $\hat{r}_S(w)\hat{n}_G(\omega_S(w))$ est naturellement un élément de $\hat{G}_{SC}$, on définit $u_{sc}(w) = t_{S,sc}(w)^{-1}\hat{r}_S(w)\hat{n}_G(\omega_S(w)) \in \hat{G}_{SC}$. Parce que $(t_{S,sc}, s_{sc})$ est un cocycle, le même calcul qu'en (3) montre que

$$s_{sc}\hat{\theta}(u_{sc}(w))w_{G^*}(s_{sc})^{-1} = u_{sc}(w)$$

pour $w \in I_v$. On a en fait $w_{G^*}(s_{sc}) = s_{sc}$ puisque l'action $w \mapsto w_{G^*}$ est non ramifiée. Donc $u(w)$ appartient au groupe des points fixes de l'automorphisme $ad_{s_{sc}} \circ \hat{\theta}$ de $\hat{G}_{SC}$. Ce dernier groupe étant simplement connexe, le groupe de points fixes est connexe. Son image dans $\hat{G}$ est la composante neutre du groupe des points fixes de $ad_s \circ \hat{\theta}$, c'est-à-dire $\hat{G}'$. Il résulte des définitions que $u(w) \in \hat{S}^{\hat{\theta},0}u_{sc}(w)$ pour $w \in I_v$. Donc $u(w) \in \hat{G}'$ pour

$w \in I_v$. Alors $(1, w) = u(w)^{-1}u_w \in \mathcal{G}'$, ce qui est la condition pour que la donnée $\mathbf{G}'$ soit non ramifiée en v. Cela prouve (4).

Par construction, l'élément $u(w)$ normalise $\hat{T}$. La relation (3) entraîne que son image dans W est fixe par $\hat{\theta}$. Il en résulte que l'élément $g(w)$ défini par $g_w = (g(w), w)$ a les mêmes propriétés. On note $\omega_{G'}(w)$ son image dans W^θ et on note $\omega_{S,G'}(w)$ l'élément de W^θ tel que l'image de $u(w)$ dans W soit $\omega_{S,G'}(w)\omega_{G'}(w)$. Parce que $g_w \in \hat{G}'u_w$, on a en fait $\omega_{S,G'}(w) \in W^{G'}$. Il est clair que les applications $\omega_{G'}$ et $\omega_{S,G'}$, qui sont définies sur W_F, se factorisent en des applications continues sur Γ_F. La définition de u_w entraîne l'égalité

$$\omega_{S,G'}(\sigma)\omega_{G'}(\sigma) = \omega_S(\sigma) = \omega_{S_{\bar{H}}}(\sigma)\omega_{\bar{H}}(\sigma)\omega_{\bar{G}}(\sigma)$$

pour tout $\sigma \in \Gamma_F$. Comme en 1.7, l'élément μ s'identifie à un élément $\mu' \in T'^* \times_{\mathcal{Z}(G')} \mathcal{Z}(\tilde{G}')$, où T'^* est <u>le</u> tore de G'. Les calculs de systèmes de racines de ce paragraphe et l'hypothèse $\mathbf{p}_1(p) = \bar{s}$ entraînent que le groupe $W^{\bar{H}}$ s'identifie au groupe $W^{G'}(\mu')$. Le terme $\omega_{S_{\bar{H}}}(\sigma)$ appartient à ce groupe. Posons

$$\omega_{\bar{G}'}(\sigma) = \omega_{S_{\bar{H}}}(\sigma)^{-1}\omega_{S,G'}(\sigma).$$

On a $\omega_{\bar{G}'}(\sigma) \in W^{G'}$ et l'égalité précédente se récrit

$$(5) \qquad \omega_{\bar{G}'}(\sigma)\omega_{G'}(\sigma) = \omega_{\bar{H}}(\sigma)\omega_{\bar{G}}(\sigma).$$

D'où aussi

$$\omega_{\bar{G}'}(\sigma)\sigma_{G'} = \omega_{\bar{H}}(\sigma)\omega_{\bar{G}}(\sigma)\sigma_{G^*}.$$

Le membre de droite fixe μ donc celui de gauche fixe μ'. Le membre de droite conserve l'ensemble des racines positives de $\bar{H}$, donc celui de gauche conserve l'ensemble $\Sigma_+^{G'}(\mu')$. Donc $(\mu', \omega_{\bar{G}'})$ appartient à $Stab(\tilde{G}'(F))$. La relation (5) entraîne que cet élément s'envoie sur $(\mu, \omega_{\bar{G}})$ par l'application de $Stab(\tilde{G}'(F))$ dans $Stab(\tilde{G}(F))$. D'après 1.7(3), $(\mu', \omega_{\bar{G}'})$ vérifie pour $v \notin V$ les conditions (nr1), (nr2) et (nr3) de 1.6, puisque $(\mu, \omega_{\bar{G}})$ les vérifie. La condition (nr4) résulte de (5) : pour $v \notin V$ et $\sigma \in I_v$, on a $\omega_{G'}(\sigma) = 1$ puisque $\mathbf{G}'$ est non ramifié, $\omega_{\bar{H}}(\sigma) = 1$ puisque $\mathbf{H}$ est non ramifié, $\omega_{\bar{G}}(\sigma) = 1$ puisque $v \notin S(\mathcal{X}, \tilde{K})$ (on a imposé $S(\mathcal{X}, \tilde{K}) \subset V$, cf. 5.1) ; d'où $\omega_{\bar{G}'}(\sigma) = 1$. Donc $S(p_{\tilde{G}'}(\mu', \omega_{\bar{G}'}), \tilde{K}') \subset V$.

En inversant la preuve de 5.2(3), on voit que les hypothèses d'ellipticité de $\mathbf{H}$ et de $(\mu, \omega_{\bar{G}})$ entraînent que $\mathbf{G}'$ est elliptique et que $(\mu', \omega_{\bar{G}'})$ l'est aussi. En utilisant l'hypothèse $\mathbf{p}_1(p) = \bar{s}$ et la relation (5), on voit que les données $(\mathbf{G}', \mu', \omega_{\bar{G}'})$ s'envoient sur $\mathbf{H}$ par la construction du paragraphe 5.2. Evidemment, la donnée $\mathbf{G}'$ n'a pas de raison d'appartenir à l'ensemble de représentants des classes de $\hat{T}$-équivalence que l'on a fixé, mais on peut la remplacer par l'élément de cet ensemble qui lui est $\hat{T}$-équivalent. Tout cela démontre que $(\mathbf{G}', \mu', \omega_{\bar{G}'})$ appartient à l'ensemble $\mathcal{J}_\star(\mathbf{H})$ introduit en 5.4. On rappelle que cet ensemble est défini de façon analogue à $\mathcal{J}(\mathbf{H})$, sauf que l'on supprime la condition que $\mathbf{G}'$ est relevante. Mais on a vu en 5.6(1) que, sous l'hypothèse posée sur $\mathbf{H}$, cette condition de relevance était automatique. Donc $(\mathbf{G}', \mu', \omega_{\bar{G}'}) \in \mathcal{J}(\mathbf{H})$. Il résulte des constructions que l'image de cet élément par $\mathbf{p}$ est l'élément $p \in P(\mathbf{H})$ dont on est parti. Cela achève la preuve. $\square$

6.5 Dualités

On a déjà introduit le groupe

$$P = H^{1,0}(W_F; \hat{S}/\hat{S}^{\hat{\theta},0} \stackrel{1-\hat{\theta}}{\to} \hat{S}_{ad}).$$

Introduisons le tore S sur F égal à T^* muni de l'action galoisienne $\sigma \mapsto \omega_S(\sigma)\sigma_{G^*}$. Son dual est $\hat{S}$. Introduisons le groupe

$$Q = H^{1,0}(\mathbb{A}_F/F; S_{sc} \stackrel{1-\theta}{\to} (1-\theta)(S)).$$

Comme on l'a dit en 6.1, Kottwitz et Shelstad définissent une topologie sur Q, pour laquelle ce groupe est localement compact, ainsi qu'un accouplement entre P et Q. On a

(1) l'accouplement entre P et Q identifie P au groupe $Hom_{cont}(Q, \mathbb{C}^\times)$ des homomorphismes continus de Q dans $\mathbb{C}^\times$.

D'après 6.1(2), il suffit de prouver que l'homomorphisme

$$\hat{S}^{\Gamma_F,0} \stackrel{1-\hat{\theta}}{\to} \hat{S}_{ad}^{\Gamma_F,0}$$

est surjectif. On a une projection $\hat{S}/(1-\hat{\theta})(\hat{S}) \to \hat{S}_{\bar{H}}$ de noyau $Z(\hat{\bar{G}})$. Elle est équivariante pour les actions galoisiennes. Le tore $S_{\bar{H}}$ est elliptique dans $\bar{H}_v$ pour toute place non-archimédienne $v \in V$. Cet ensemble de places est non vide puisque V contient V_{ram}, lequel contient les places de caractéristique résiduelle 2, 3 et 5. Donc $S_{\bar{H}}$ est elliptique dans $\bar{H}$. De plus $\bar{H}$ est une donnée elliptique pour $\bar{G}_{SC}$. Il en résulte que $\hat{S}_{\bar{H}}^{\Gamma_F,0} = \{1\}$. Donc $(\hat{S}/(1-\hat{\theta})(\hat{S}))^{\Gamma_F,0} \subset Z(\hat{\bar{G}})^{\Gamma_F,0}$. Mais $(\mu, \omega_{\bar{G}})$ est elliptique. Donc $Z(\hat{\bar{G}})^{\Gamma_F,0}$ est l'image naturelle de $Z(\hat{G})^{\Gamma_F,0}$. Il en résulte que $(\hat{S}_{ad}/(1-\hat{\theta})(\hat{S}_{ad}))^{\Gamma_F,0} = \{1\}$. C'est équivalent à la surjectivité cherchée. $\square$

Pour une place $v \in Val(F)$, on pose

$$P_v = H^{1,0}(W_{F_v}; \hat{S}/\hat{S}^{\hat{\theta},0} \stackrel{1-\hat{\theta}}{\to} \hat{S}_{ad})$$

et

$$Q_v = H^{1,0}(F_v; S_{sc} \stackrel{1-\theta}{\to} (1-\theta)(S)).$$

On note $res_v : P \to P_v$ l'homomorphisme de restriction et $\iota_v : Q_v \to Q$ l'homomorphisme naturel. On note

$$\mathbf{p}_{2,v} : P_v \to H^1(W_{F_v}; Z(\hat{G}))$$

l'analogue local de l'homomorphisme $\mathbf{p}'_2$.

On a rappelé en 5.5 le groupe $G_\sharp = G/Z(G)^\theta$. On a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} S_{sc} & \to & S \\ \downarrow & & \downarrow \\ S_{sc} & \to & S/Z(G)^\theta \\ \downarrow & & \downarrow 1-\theta \\ S_{sc} & \stackrel{1-\theta}{\to} & (1-\theta)(S) \end{array}$$

Comme on l'a dit en 6.2, le groupe $G_{ab}(F_v)$ peut se définir à l'aide du complexe $S_{sc} \to S$. De même, $G_{\sharp,ab}(F_v)$ peut se définir à l'aide du complexe $S_{sc} \to S/Z(G)^\theta$. On déduit du diagramme ci-dessus un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} G_{ab}(F_v) & & \stackrel{\boldsymbol{\zeta}_v}{\to} & & Q_v \\ & \searrow & & \nearrow \boldsymbol{\zeta}_{\sharp,v} & \\ & & G_{\sharp,ab}(F_v) & & \end{array}$$

Enfin, on note

$$\mathbf{q}_1 : H^1(\mathbb{A}_F/F; S_{\bar{H}}) \to Q$$

l'homomorphisme déduit de l'homomorphisme $S_{\bar{H}} \to S_{sc}$ dual de $\hat{S}_{ad} \to \hat{S}_{\bar{H}}$.

Proposition. *(i) Pour toute place v, le noyau de $\mathbf{p}_{2,v} \circ res_v$ est l'annulateur dans P de $\iota_v \circ \boldsymbol{\zeta}_v(G_{ab}(F_v))$.*

(ii) Pour toute place $v \notin V$, le sous-groupe des $p \in P$ tels que res_{I_v} appartienne à l'image de φ_v est l'annulateur dans P de $\iota_v \circ \boldsymbol{\zeta}_{\sharp,v}(G_{\sharp,ab}(\mathfrak{o}_v)$.

(iii) Le noyau de $\mathbf{p}_1$ est l'annulateur dans P de l'image de $\mathbf{q}_1$.

Preuve. L'accouplement entre $H^1(\mathbb{A}_F/F; S_{\bar{H}})$ et $\hat{S}_{\bar{H}}^{\Gamma_F}$ identifie le second groupe à celui des homomorphismes continus du premier dans $\mathbb{C}^\times$. Comme dans la preuve de (1), cela résulte de [KS] lemme C.2.C et de l'ellipticité de $S_{\bar{H}}$. Alors $\mathbf{p}_1$ s'identifie à l'homomorphisme

$$Hom_{cont}(Q, \mathbb{C}^\times) \to Hom_{cont}(H^1(\mathbb{A}_F/F; S_{\bar{H}}), \mathbb{C}^\times)$$

déduit par dualité de $\mathbf{q}_1$. L'assertion (iii) résulte de la propriété générale suivante : si $f : X \to Y$ est un homomorphisme continu entre groupes abéliens localement compacts, le noyau de l'homomorphisme dual

$$f^D : Hom_{cont}(Y, \mathbb{C}^\times) \to Hom_{cont}(X, \mathbb{C}^\times)$$

est l'annulateur de l'image de f.

Soit v une place de F. On a un diagramme

$$\begin{array}{ccccc} P & \stackrel{res_v}{\to} & P_v & \stackrel{\mathbf{p}_{2,v}}{\to} & H^1(W_{F_v}; Z(\hat{G})) \\ Q & \stackrel{\iota_v}{\leftarrow} & Q_v & \stackrel{\boldsymbol{\zeta}_v}{\leftarrow} & G_{ab}(F_v) \end{array}$$

Il y a des accouplements entre P et Q, entre P_v et Q_v et entre $H^1(W_{F_v}; Z(\hat{G}))$ et $G_{ab}(F_v)$. On a déjà dit que, par le premier accouplement, P s'identifiait à $Hom_{cont}(Q, \mathbb{C}^\times)$. On sait aussi que, par le dernier, $H^1(W_{F_v}; Z(\hat{G}))$ s'identifie à $Hom_{cont}(G_{ab}(F_v), \mathbb{C}^\times)$. On vérifie que $\mathbf{p}_{2,v} \circ res_v$ s'identifie à l'homomorphisme

$$Hom_{cont}(G_{ab}(F_v), \mathbb{C}^\times) \to Hom_{cont}(Q, \mathbb{C}^\times)$$

dual de $\iota_v \circ \boldsymbol{\zeta}_v$. L'assertion (ii) résulte alors du même principe général que ci-dessus.

Remarque. En général, l'accouplement entre P_v et Q_v a un noyau dans P_v, égal à l'image naturelle de l'homomorphisme $\hat{S}_{ad}^{\Gamma_{F_v},0} \to P_v$. C'est le conoyau de cet homomorphisme qui s'identifie à $Hom_{cont}(Q_v, \mathbb{C}^\times)$.

Soit $v \notin V$. Notons $S_\sharp = S/Z(G)^\theta$. On a décrit le tore dual $\hat{S}_\sharp$ en [I] 2.7. On a une suite exacte

$$1 \to \hat{S}_{sc}/\hat{S}_{sc}^{\hat{\theta}} \stackrel{(\pi, 1-\hat{\theta})}{\to} \hat{S}/\hat{S}^{\hat{\theta},0} \times \hat{S}_{sc} \to \hat{S}_\sharp \to 1.$$

Il s'en déduit un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \hat{S}_{sc}/\hat{S}_{sc}^{\hat{\theta}} & \stackrel{1-\hat{\theta}}{\to} & \hat{S}_{sc} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \hat{S}/\hat{S}^{\hat{\theta},0} & \stackrel{1-\hat{\theta}}{\to} & \hat{S}_{ad} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \hat{S}_\sharp & \to & \hat{S}_{ad} \end{array}$$

C'est un triangle distingué dans la catégorie des complexes de tores. On obtient un diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & & H^{1,0}(I_v;\hat{S}_{sc}/\hat{S}_{sc}^{\hat{\theta}} \overset{1-\hat{\theta}}{\to} \hat{S}_{sc}) \\
 & & & & \downarrow \varphi_v \\
P & \overset{res_v}{\to} & P_v & \overset{Res_{I_v}}{\to} & H^{1,0}(I_v;\hat{S}/\hat{S}^{\hat{\theta},0} \overset{1-\hat{\theta}}{\to} \hat{S}_{ad}) \\
 & & \downarrow \mathbf{p}_{2,\sharp,v} & & \downarrow \\
 & & H^{1,0}(W_{F_v};\hat{S}_\sharp \to \hat{S}_{ad}) & \overset{Res_{\sharp,I_v}}{\to} & H^{1,0}(I_v;\hat{S}_\sharp \to \hat{S}_{ad}) \\
 & & \| & & \| \\
 & & H^1(W_{F_v};Z(\hat{G}_\sharp)) & \overset{Res_{\sharp,I_v}}{\to} & H^1(I_v;Z(\hat{G}_\sharp))
\end{array}$$

Les deux premiers homomorphismes de la colonne de droite forment une suite exacte. D'autre part, on a l'égalité $res_{I_v} = Res_{I_v} \circ res_v$ avec la notation ci-dessus. Donc, pour $p \in P$, la condition que $res_{I_v}(p)$ appartienne à l'image de φ_v est équivalente à ce que $\mathbf{p}_{2,\sharp,v} \circ res_v(p)$ appartienne au noyau de $Res_{\sharp,I_v}$. Le groupe $H^1(W_{F_v};Z(\hat{G}_\sharp))$ s'identifie à $Hom_{cont}(G_{\sharp,ab}(F_v),\mathbb{C}^\times)$. D'après 1.5(4) et 6.2(1), un élément $\chi \in H^1(W_{F_v};Z(\hat{G}_\sharp))$ est annulé par $Res_{\sharp,I_v}$ si et seulement si χ annule $G_{\sharp,ab}(\mathfrak{o}_v)$. La condition que $res_{I_v}(p)$ appartienne à l'image de φ_v équivaut donc à l'égalité $< \mathbf{p}_{2,\sharp,v} \circ res_v(p), k >= 1$ pour tout $k \in G_{\sharp,ab}(\mathfrak{o}_v)$. Mais on a l'égalité $< \mathbf{p}_{2,\sharp,v} \circ res_v(p), k >=< p, \iota_v \circ \boldsymbol{\zeta}_{\sharp,v}(k) >$. La condition ci-dessus équivaut donc à ce que p annule $\iota_v \circ \boldsymbol{\zeta}_{\sharp,v}(G_{\sharp,ab}(\mathfrak{o}_v))$. Cela prouve (ii). $\square$

Supposons que v soit une place hors de V en laquelle S est non ramifiée. On a alors

(2) le groupe $\iota_v \circ \boldsymbol{\zeta}_{\sharp,v}(G_{\sharp,ab}(\mathfrak{o}_v))$ coïncide avec l'image naturelle dans Q de $((1-\theta)(S))(\mathfrak{o}_v)$.

Preuve. On a une suite exacte

$$1 \to S^\theta/Z(G)^\theta \to S_\sharp \overset{1-\theta}{\to} (1-\theta)(S) \to 1.$$

Il s'en déduit une suite exacte

$$1 \to (S^\theta/Z(G)^\theta)(\mathfrak{o}_v^{nr}) \to S_\sharp(\mathfrak{o}_v^{nr}) \overset{1-\theta}{\to} ((1-\theta)(S))(\mathfrak{o}_v^{nr}) \to 1.$$

Mais le groupe $S^\theta/Z(G)^\theta$ est connexe en vertu de l'égalité $S^\theta = S^{\theta,0}Z(G)^\theta$. En prenant les invariants par le groupe de Galois Γ_v^{nr}, le théorème de Lang implique la surjectivité de l'homomorphisme

$$S_\sharp(\mathfrak{o}_v) \overset{1-\theta}{\to} ((1-\theta)(S))(\mathfrak{o}_v).$$

On a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
S_\sharp(\mathfrak{o}_v) & \overset{1-\theta}{\to} & ((1-\theta)(S))(\mathfrak{o}_v) \\
\downarrow & & \downarrow \\
G_{\sharp,ab}(F_v) & \to & Q_v.
\end{array}$$

D'après 1.5(2) et 6.2(1), l'image de $S_\sharp(\mathfrak{o}_v)$ dans $G_{\sharp,ab}(F_v)$ coïncide avec $G_{\sharp,ab}(\mathfrak{o}_v)$. Cela conclut. $\square$

6.6 Description d'un annulateur

On note P^0 le sous-groupe des $p \in P$ tels que

- $\mathbf{p}_1(p)=0$;
- pour toute place v, $\mathbf{p}_{2,v}\circ res_v(p)=0$;
- pour toute place $v\not\in V$, $res_{I_v}(p)$ appartient à l'image de φ_v.

Remarquons que l'ensemble $P(\mathbf{H})\subset P$ introduit en 6.4 est soit vide, soit une unique classe modulo ce sous-groupe P^0.

On a déjà défini l'homomorphisme $\mathbf{q}_1 : H^1(\mathbb{A}_F/F;S_{\bar{H}})\to Q$. On pose $Q_1=H^1(\mathbb{A}_F/F;S_{\bar{H}})$.

Pour toute place v, on a défini des homomorphismes $\boldsymbol{\zeta}_v : G_{ab}(F_v)\to Q_v$ et $\boldsymbol{\zeta}_{\sharp,v}$: $G_{\sharp,ab}(F_v)\to Q_v$. Ils se globalisent en des homomorphismes $\boldsymbol{\zeta} : H^0_{ab}(\mathbb{A}_F;G)\to H^{1,0}(\mathbb{A}_F;S_{sc}\stackrel{1-\theta}{\to}(1-\theta)(S))$ et $\boldsymbol{\zeta}_\sharp : H^0_{ab}(\mathbb{A}_F;G_\sharp)\to H^{1,0}(\mathbb{A}_F;S_{sc}\stackrel{1-\theta}{\to}(1-\theta)(S))$. En poussant le premier par l'application naturelle $H^{1,0}(\mathbb{A}_F;S_{sc}\stackrel{1-\theta}{\to}(1-\theta)(S))\to Q$, on obtient un homomorphisme $H^0_{ab}(\mathbb{A}_F;G)\to Q$. Il est clair qu'il annule l'image naturelle de $H^0_{ab}(F;G)$ dans l'espace de départ. En notant $Im(H^0_{ab}(F;G))$ cette image et $Q_2=H^0_{ab}(\mathbb{A}_F;G)/Im(H^0_{ab}(F;G))$, on obtient un homomorphisme $\mathbf{q}_2 : Q_2\to Q$. Notons $Q_3=\prod_{v\not\in V}H^0_{ab}(\mathfrak{o}_v;G_\sharp)$. C'est un sous-groupe de $H^0_{ab}(\mathbb{A}_F;G_\sharp)$. En utilisant l'homomorphisme $\boldsymbol{\zeta}_\sharp$, on obtient de même un homomorphisme $\mathbf{q}_3 : Q_3\to Q$.

On note Q_0 le sous-groupe de Q engendré par les sous-groupes $\mathbf{q}_i(Q_i)$ pour $i=1,2,3$.

Lemme. *Le groupe Q_0 est un sous-groupe ouvert, fermé et d'indice fini de Q. Le groupe P^0 est l'annulateur de Q_0 dans P. Le groupe Q_0 est l'annulateur de P^0 dans Q.*

Preuve. On a une suite d'homomorphismes

$$(1)\qquad ((1-\theta)(S))(\mathbb{A}_F)\to H^{1,0}(\mathbb{A}_F;S_{sc}\stackrel{1-\theta}{\to}(1-\theta)(S))\to Q.$$

Pour $v\in Val_F$, le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccccc} & & S(F_v) & & \\ & \swarrow & & \searrow & \\ G(F_v) & & & & (1-\theta)(S(F_v)) \\ & & & & \downarrow \\ \downarrow & & & & ((1-\theta)(S))(F_v) \\ & & & & \downarrow \\ G_{ab}(F_v) & & \stackrel{\zeta_v}{\to} & & Q_v \end{array}$$

Donc Q_0 contient l'image naturelle de $(1-\theta)(S(F_v))$. Ce groupe s'envoyant sur un sous-groupe ouvert d'indice fini de $((1-\theta)(S))(F_v)$, Q_0 contient l'image naturelle d'un tel sous-groupe. L'assertion 6.5(2) montre qu'il contient aussi $((1-\theta)(S))(\mathfrak{o}_v)$ pour presque toute place finie v. Donc Q_0 contient l'image par la suite d'homomorphismes (1) d'un sous-groupe ouvert de $((1-\theta)(S))(\mathbb{A}_F)$. D'après la définition de la topologie de Q ([KS] page 147), Q_0 est donc un sous-groupe ouvert de Q.

En [KS] page 151, Kottwitz et Shelstad définissent un homomorphisme

$$(2)\qquad Q=H^{1,0}(\mathbb{A}_F/F;S_{sc}\stackrel{1-\theta}{\to}(1-\theta)(S))\to coker(\mathfrak{A}_{S_{sc}}\stackrel{1-\theta}{\to}\mathfrak{A}_{(1-\theta)(S)}).$$

Cet homomorphisme possède une section naturelle. On a l'égalité $\mathfrak{A}_S=\mathfrak{A}_{S_{sc}}\times\mathfrak{A}_G$, d'où

$$\mathfrak{A}_{(1-\theta)(S)}=(1-\theta)(\mathfrak{A}_S)=(1-\theta)(\mathfrak{A}_{S_{sc}})\times(1-\theta)(\mathfrak{A}_G).$$

Le conoyau ci-dessus est donc isomorphe à $(1-\theta)(\mathfrak{A}_G)$. En reprenant les définitions de [KS], on voit que l'image de ce groupe par la section de l'homomorphisme (2) coïncide avec l'image de

$$\mathfrak{A}_G \to \prod_{v\in Val_\infty(F)} G(F_v) \overset{\prod_{v\in Val_\infty(F)} \iota_v\circ\boldsymbol{\zeta}_v}{\longrightarrow} Q.$$

Notons Q_c le noyau de (2). On obtient un isomorphisme

$$Q \simeq Q_c \times (1-\theta)(\mathfrak{A}_G).$$

C'est un homéomorphisme et le groupe Q_c est compact d'après [KS] lemme C.2.D. La description que l'on vient de donner de l'image de $(1-\theta)(\mathfrak{A}_G)$ dans Q montre que ce groupe est contenu dans Q_0. Donc Q_0 est le produit de $(1-\theta)(\mathfrak{A}_G)$ et d'un sous-groupe ouvert de Q_c. Ce dernier étant compact, ce sous-groupe est aussi fermé et d'indice fini. D'où la première assertion de l'énoncé.

Par définition de P^0 et d'après la proposition 6.5, P^0 est l'annulateur du sous-groupe Q'_0 de Q engendré par les images des différents homomorphismes décrits dans cette proposition. C'est aussi l'annulateur de l'adhérence Q''_0 de ce sous-groupe. Tous les groupes décrits dans la proposition 6.5 sont inclus dans Q_0. Donc $Q'_0 \subset Q_0$ et aussi $Q''_0 \subset Q_0$ puisque Q_0 est fermé. En sens inverse, Q'_0 contient $\mathbf{q}_1(Q_1)$. Il contient $\iota_v\circ\boldsymbol{\zeta}_v(G_{ab}(F_v))$ pour tout v. Il est clair que $\mathbf{q}_2(Q_2)$ est l'adhérence du groupe engendré par ces sous-groupes quand v parcourt $Val(F)$. Donc $\mathbf{q}_2(Q_2) \subset Q''_0$. De même, Q'_0 contient $\iota_v \circ \boldsymbol{\zeta}_{\sharp,v}(G_{ab}(\mathfrak{o}_v))$ pour tout $v \notin V$. Le groupe $\mathbf{q}_3(Q_3)$ est l'adhérence du groupe engendré par ces sous-groupes quand v parcourt $Val(F)-V$. Donc $\mathbf{q}_3(Q_3) \subset Q''_0$. Cela démontre que $Q''_0 = Q_0$ donc que P^0 est l'annulateur de Q_0.

Puisque Q_0 est un sous-groupe ouvert d'indice fini de Q, de la dualité entre P et Q se déduit une dualité entre les groupes finis P^0 et Q/Q_0. Alors Q_0 est aussi l'annulateur de P^0 dans Q. $\square$

6.7 L'ensemble $D_{\mathbb{A}_F}$

Pour toute place $v \in Val(F)$, on a défini l'ensemble D_v en 5.4. La condition 5.1(3) signifie qu'il est non vide. On note $D_{\mathbb{A}_F}$ l'ensemble des familles $d = (d_v)_{v\in Val(F)}$ telles que $d_v \in D_v$ pour tout v et $\eta[d] \in \tilde{G}(\mathbb{A}_F)$, où $\eta[d] = (\eta[d_v])_{v\in Val(F)}$. Soulignons qu'on n'impose aucune condition "globale" à la famille $r[d] = (r[d_v])_{v\in Val(F)}$.

On définit de même $D_{\mathbb{A}_F^V}$ en remplaçant l'ensemble d'indices $Val(F)$ par $Val(F)-V$. On a l'égalité $D_{\mathbb{A}_F} = D_V \times D_{\mathbb{A}_F^V}$. Pour un élément $d = (d_v)_{v\in Val(F)}$, on a $\eta[d_v] \in \tilde{K}_v$ pour presque tout v, donc $d_v \in D_v^{nr}$ pour presque tout v. Inversement, on a dit en 5.5(2) que le lemme 1.6 impliquait que l'ensemble D_v^{nr} était non vide pour tout $v \notin V$. Puisque D_V non vide d'après 5.1(3), l'ensemble $D_{\mathbb{A}_F}$ n'est pas vide lui non plus. On note $D_{\mathbb{A}_F^V}^{nr}$ le sous-ensemble des $d = (d_v)_{v\in Val(F)-V} \in D_{\mathbb{A}_F^V}$ tels que $d_v \in D_v^{nr}$ pour tout $v \notin V$. Il n'est pas vide lui non plus.

Soit $d = (d_v)_{v\in Val(F)} \in D_V^{rel} \times D_{\mathbb{A}_F^V}^{nr} \subset D_{\mathbb{A}_F}$. On peut fixer pour toute place $v \in Val(F)$ une paire de Borel $(B[d_v], S[d_v])$ vérifiant les conditions de 5.6. Rappelons celles-ci. Le tore $S[d_v]$ est défini sur F_v. Le sous-groupe de Borel $B[d_v]$ est défini sur $\bar{F}_v$. La paire $(B[d_v], S[d_v])$ est conservée par $ad_{\eta[d_v]}$. Il existe $u \in G_{\eta[d_v]}$ tel que $ad_{r[d_v]u}(B[d_v], S[d_v]) = (B^*, T^*)$ et que $ad_{r[d_v]u}$ se restreigne en un isomorphisme défini sur F_v de $S[d_v]$ sur S (on rappelle que $S = T^*$ muni de l'action galoisienne $\sigma \mapsto \omega_S(\sigma)\sigma_{G^*})$. Nous allons imposer des conditions supplémentaires "globales" à ces paires.

On a fixé en 5.2 une paire de Borel épinglée $\mathcal{E}^*$ de G, une paire de Borel épinglée $\bar{\mathcal{E}}$ de $\bar{G}$ et des éléments $\nu \in T^*$ et $e \in Z(\tilde{G}, \mathcal{E}^*)$. On a noté $\theta^* = ad_e$. On fixe pour tout $\sigma \in \Gamma_F$ un élément $u_{\mathcal{E}^*}(\sigma) \in G_{SC}(\bar{F})$ tel que $\sigma_{G^*} = ad_{u_{\mathcal{E}^*}(\sigma)} \circ \sigma$ conserve $\mathcal{E}^*$. On peut supposer que $\sigma \mapsto u_{\mathcal{E}^*}(\sigma)$ est continue et se factorise par un quotient fini de Γ_F. On peut aussi supposer $u_{\mathcal{E}^*}(1) = 1$. D'autre part, les applications $\sigma \mapsto \omega_{\bar{G}}(\sigma)$ et $\sigma \mapsto \omega_S(\sigma)$ sont des cocycles de Γ_F dans W^{θ^*} (muni de l'action quasi-déployée). D'après [K1] corollaire 2.2, on peut fixer $x \in G_{SC}^{\theta^*}(\bar{F})$ tel que $x\sigma_{G^*}(x)^{-1}$ normalise T^* et ait $\omega_S(\sigma)$ pour image dans W. On fixe une extension galoisienne finie E de F telle que

- $\mathcal{E}^*$ et $\bar{\mathcal{E}}$ soient définies sur E et G soit déployé sur E ;

- $\nu \in T^*(E)$, $e \in Z(\tilde{G}, \mathcal{E}^*; E)$, $x \in G_{SC}^{\theta^*}(E)$;

- l'application $\sigma \mapsto u_{\mathcal{E}^*}(\sigma)$ se factorise par $Gal(E/F)$ et prend ses valeurs dans $G_{SC}(E)$:

- l'application $\sigma \mapsto \omega_{\bar{G}}(\sigma)$ se factorise par $Gal(E/F)$.

Il en résulte que toutes les actions galoisiennes coïncident sur Γ_E et que tous les groupes qui interviennent sont déployés sur E. Utilisons les définitions de 1.5. Fixons un ensemble fini V' de places de F, contenant V, de sorte que, pour toute place $v \notin V'$ et toute place w' de E au-dessus de v, $E_{w'}/F_v$ soit non ramifiée et que les propriétés suivantes soient vérifiées

- $K_{w'}$ est le sous-groupe compact hyperspécial issu de la paire de Borel épinglée $\mathcal{E}^*$;

- $e \in \tilde{K}_{w'}$, $\nu \in T^*(\mathfrak{o}_{w'})$, $x \in K_{w'}$ et, pour tout $\sigma \in \Gamma_F$, $u_{\mathcal{E}^*}(\sigma) \in K_{w'}$.

Soit $v \in Val(F)$. Rappelons que v a été prolongée en une place $\bar{v}$ de $\bar{F}$, cf. [VI] 1.1. Le corps $\bar{F}_v$ a été identifié à la clôture algébrique de F_v dans le complété de $\bar{F}$ en $\bar{v}$. Par abus de notations, notons-le $\bar{F}_{\bar{v}}$. Le groupe Γ_{F_v} a été identifié au fixateur de $\bar{v}$ dans Γ_F. Notons-le plutôt $\Gamma_{\bar{v}}$. On notera sans plus de commentaire w la restriction de $\bar{v}$ à E. Soit w' une autre place de E divisant v. On fixe une fois pour toutes un élément $\tau \in \Gamma_F$ telle que $\tau(w) = w'$ (avec $\tau = 1$ dans le cas $w' = w$). Notons $\bar{v}' = \tau(\bar{v})$. De τ se déduit un isomorphisme de $\bar{F}_{\bar{v}}$ sur $\bar{F}_{\bar{v}'}$. Pour toute variété algébrique X défini sur F_v, on a aussi un isomorphisme $\tau : X(\bar{F}_{\bar{v}}) \to X(\bar{F}_{\bar{v}'})$. Pour une paire $(B[d_v], S[d_v])$ comme ci-dessus, le groupe $B[d_v]$ est précisément défini sur $\bar{F}_{\bar{v}}$. En fait, le tore $S[d_v]$ est déployé sur E_w donc tout sous-groupe de Borel contenant ce tore est défini sur E_w. En particulier $B[d_v]$ est défini sur E_w. Notons $S[d](\mathbb{A}_E)$ le produit restreint des $S[d_v](E_{w'})$ sur toutes les places $v \in Val(F)$ et les places w' de E divisant v. La restriction est relative aux sous-groupes $S[d_v](\mathfrak{o}_{w'})$ qui sont définis pour presque tous v et w'. Le groupe de Galois $Gal(E/F)$ agit naturellement sur $S[d](\mathbb{A}_E)$.

Proposition. *Soit $d = (d_v)_{v \in Val(F)} \in D_V^{rel} \times D_{\mathbb{A}_F^V}^{nr} \subset D_{\mathbb{A}_F}$. On peut fixer*

- pour toute place v une paire de Borel $(B[d_v], S[d_v])$ vérifiant les conditions de 5.6 ;

- un élément $g = (g_{w'})_{w' \in Val(E)} \in G_{SC}(\mathbb{A}_E)$;

- un élément $t = (t_{w'})_{w' \in Val(E)} \in ((1-\theta^*)(T^*))(\mathbb{A}_E)$;

de sorte que les conditions suivantes soient vérifiées :

(i) si $v \notin V'$ et $\eta[d_v] \in \tilde{K}_v$, alors, pour tout w' divisant v, on a $S[d_v](\mathfrak{o}_{w'}) \subset K_{w'}$, $g_{w'} \in K_{sc,w'}$ et $t_{w'} \in ((1-\theta^*)(T^*))(\mathfrak{o}_{w'})$;

(ii) $ad_g(S[d](\mathbb{A}_E)) = S(\mathbb{A}_E)$ et ad_g se restreint en un isomorphisme de $S[d](\mathbb{A}_E)$ sur $S(\mathbb{A}_E)$ qui est équivariant pour les actions galoisiennes ;

(iii) pour toute place $v \in Val(F)$, on a $ad_{g_w}(B[d_v], S[d_v]) = (B^*, T^*)$ et $g_w \in T^*(\bar{F}_{\bar{v}})r[d_v]G_{\eta[d_v]}(\bar{F}_{\bar{v}})$;

(iv) pour toute place $v \in Val(F)$ et toute place w' de E divisant v, on a l'égalité $g_{w'} = x\tau_{G^*}(x)^{-1}u_{\mathcal{E}^*}(\tau)\tau(g_w)$, où $\tau \in \Gamma_F$ est l'élément fixé tel que $\tau(w) = w'$;

(v) $ad_g(\eta[d]) = t\eta$.

Remarques. (1) La condition (i) entraîne que $S[d](\mathbb{A}_E)$ est contenu dans $G(\mathbb{A}_E)$. Cela donne un sens à la condition (ii).

(2) On peut choisir arbitrairement la paire $(B[d_v], S[d_v])$ pour un ensemble fini de places v, pourvu que ces paires satisfassent aux conditions de 5.6.

(3) Sous les hypothèses de (i), la première inclusion se généralise en $S[d_v](\mathfrak{o}_v^{nr}) \subset K_v^{nr}$. En prenant les invariants par Γ_v^{nr}, on en déduit $S[d_v](\mathfrak{o}_v) \subset K_v$.

Preuve. Soit $v \in Val(F)$, fixons une paire de Borel $(B[d_v], S[d_v])$ vérifiant les conditions de 5.6. On va prouver l'existence de $g_v = (g_{w'})_{w'|v}$ et $t_v = (t_{w'})_{w'|v}$ (où $w'|v$ signifie que w' divise v) vérifiant les analogues des conditions (ii) à (v) où l'on se restreint aux places de E divisant v. Comme on l'a dit, on note w la restriction de $\bar{v}$ à E. Les tores $S[d_v]$ et T^* sont déployés sur E_w. Il en résulte que les groupes de Borel $B[d_v]$ et B^* sont définis sue E_w. Il existe donc $g_w \in G_{SC}(E_w)$ tel que $ad_{g_w}(B[d_v], S[d_v]) = (B^*, T^*)$. On fixe un tel élément. L'une des propriétés de la paire $(B[d_v], S[d_v])$ est qu'il existe $u \in G_{\eta[d_v]}(\bar{F}_{\bar{v}})$ tel que $ad_{r[d_v]u}(B[d_v], S[d_v]) = (B^*, T^*)$. Alors $ad_{g_w u^{-1} r[d_v]^{-1}}$ conserve (B^*, T^*). Cela implique que g_w appartient à $T^*(\bar{F}_{\bar{v}})r[d_v]u$. La condition (iii) est donc satisfaite. Soit w' une place de E au-dessus de v. On note τ l'élément fixé de Γ_F tel que $\tau(w) = w'$. On définit $g_{w'}$ par l'égalité de la condition (iv). Montrons que

(4) $ad_{g_{w'}}(S[d_v]) = T^*$;

(5) pour $\sigma \in \Gamma_{\bar{v}'}$ et $s \in S[d_v](\bar{F}_{\bar{v}'})$, on a l'égalité $ad_{g_{w'}} \circ \sigma(s) = \sigma_S \circ ad_{g_{w'}}(s)$, où $\sigma_S = \omega_S(\sigma) \circ \sigma_{G^*}$;

(6) pour $s \in S[d_v](\bar{F}_{\bar{v}})$, on a $ad_{g_{w'}} \circ \tau(s) = \tau_S \circ ad_{g_w}(s)$;

(7) il existe $t_{w'} \in ((1-\theta^*)(T^*))(E_{w'})$ tel que $ad_{g_{w'}}(\eta[d_v]) = t_{w'}\eta$.

La preuve de (4), (5) et (6) est similaire à celle de [VI] 3.6(5) et (6). On la laisse au lecteur. Prouvons (7). Remarquons que, si l'on prouve l'existence de $t_{w'} \in (1-\theta^*)(T^*(\bar{F}_{\bar{v}'}))$ satisfaisant l'égalité ci-dessus, on a nécessairement $t_{w'} \in ((1-\theta^*)(T^*))(E_{w'})$ puisque les autres termes de cette égalité sont définis sur $E_{w'}$. Pour $w' = w$, on sait qu'il existe $t_0 \in T^*(\bar{F}_{\bar{v}})$ et $u \in G_{\eta[d_v]}(\bar{F}_{\bar{v}})$ tels que $g_w = t_0 r[d_v]u$. On a alors

$$ad_{g_w}(\eta[d_v]) = ad_{t_0} \circ ad_{r[d_v]}(\eta[d_v]) = ad_{t_0}(\eta) = (1-\theta^*)(t_0)\eta.$$

D'où l'assertion avec $t_w = (1-\theta^*)(t_0)$. Pour une autre place w', on a

$$ad_{g_{w'}}(\eta[d_v]) = ad_{x\tau_{G^*}(x)^{-1}u_{\mathcal{E}^*}(\tau)} \circ ad_{\tau(g_w)}(\eta[d_v]).$$

On a $\tau(\eta[d_v]) = \eta[d_v]$ puisque $\eta[d_v] \in \tilde{G}(F_v)$. Donc

$$ad_{\tau(g_w)}(\eta[d_v]) = \tau \circ ad_{g_w}(\eta[d_v]) = \tau(t_w\eta).$$

L'application τ_S se prolonge en une application de $((1-\theta^*)(T^*))(\bar{F}_{\bar{v}})$ sur $((1-\theta^*)(T^*))(\bar{F}_{\bar{v}'})$ et on a

$$ad_{x\tau_{G^*}(x)^{-1}u_{\mathcal{E}^*}(\tau)} \circ \tau(t_w) = \tau_S(t_w).$$

Il reste à prouver que

$$ad_{x\tau_{G^*}(x)^{-1}u_{\mathcal{E}^*}(\tau)} \circ \tau(\eta) \in (1-\theta^*)(T^*(\bar{F}))\eta.$$

On a écrit $\eta = \nu e$. Soit $z(\tau) \in Z(G)$ tel que $ad_{u_{\mathcal{E}^*}(\tau)} \circ \tau(e) = z(\tau)^{-1}e$. Parce que x appartient à $G_{SC}^{\theta^*}$, on a

$$ad_{x\tau_{G^*}(x)^{-1}u_{\mathcal{E}^*}(\tau)} \circ \tau(\eta) = z(\tau)^{-1}ad_{x\tau_{G^*}(x)^{-1}u_{\mathcal{E}^*}(\tau)} \circ \tau(\nu)e = z(\tau)^{-1}\omega_S(\tau) \circ \tau_{G^*}(\nu)e.$$

On peut décomposer $\omega_S(\tau)$ en $\omega_{S,\bar{G}}(\tau)\omega_{\bar{G}}(\tau)$. Les conditions imposées en 1.1 à η impliquent que $z(\tau)^{-1}\omega_{\bar{G}}(\tau) \circ \tau_{G^*}(\nu)$ appartient à $(1-\theta^*)(T^*(\bar{F}))\nu$. L'élément $\omega_{S,\bar{G}}(\tau)$ appartient à $W^{\bar{G}}$ et tout élément de ce groupe conserve l'ensemble $(1-\theta^*)(T^*(\bar{F}))\nu$. On obtient

$$ad_{x\tau_{G^*}(x)^{-1}u_{\mathcal{E}^*}(\tau)} \circ \tau(\eta) \in (1-\theta^*)(T^*(\bar{F}))\nu e = (1-\theta^*)(T^*(\bar{F}))\eta.$$

Cela prouve (7).

Pour w' divisant v, on a défini le terme $g_{w'}$ et la relation (7) définit le terme $t_{w'}$. En posant $g_v = (g_{w'})_{w'|v}$ et $t_v = (t_{w'})_{w'|v}$, la relation (7) entraîne la condition (v) restreinte aux places divisant v. Les relations (4), (5) et (6) entraînent la condition (ii) restreinte aux mêmes places.

Supposons maintenant que $v \notin V'$ et que $\eta[d_v]$ appartient à $\tilde{K}_v$. On va prouver qu'en choisissant convenablement la paire $(B[d_v], S[d_v])$, on peut imposer la condition (i). Puisque $v \notin V$, on peut fixer une paire de Borel épinglée $\mathcal{E}_0 = (B_0, T_0, (E_{0,\alpha})_{\alpha\in\Delta})$ de G, définie sur F_v, dont est issu de groupe K_v. Puisque $\mathcal{E}^*$ et $\mathcal{E}_0$ sont toutes deux définies sur E_w, il existe $y_{ad} \in G_{AD}(E_w)$ tel que $ad_{y_{ad}}(\mathcal{E}_0) = \mathcal{E}^*$. L'automorphisme $ad_{y_{ad}}$ conserve le groupe K_w puisque ce groupe est issu de chacune des deux paires. Donc $y_{ad} \in K_{ad,w}$. On sait que les deux applications

$$\begin{array}{ccc} T^*_{ad}(\mathfrak{o}_w) \times K_{sc,w} & \to & K_{ad,w} \\ (t,k) & \mapsto & t\pi(k) \end{array}$$

et

$$T^*_{sc}(\mathfrak{o}_v^{nr}) \to T^*_{ad}(\mathfrak{o}_v^{nr})$$

sont surjectives (le corps F_v^{nr} est ici un sous-corps de $\bar{F}_{\bar{v}}$). On peut donc fixer $t_1 \in T^*_{sc}(\mathfrak{o}_v^{nr})$ et $y \in K_{sc,w}$ tels que $y_{ad} = \pi(t_1y)$. On a $t_1y \in K_v^{nr}$. Posons $\eta_1 = ad_{(t_1y)^{-1}}(\eta)$. On reprend maintenant la preuve du lemme 1.6. Puisque $\eta \in \tilde{K}_w$, on a $\eta_1 \in \tilde{K}_v^{nr}$. De plus, ad_{η_1} conserve (B_0, T_0). Fixons $\nu_0 \in T_0(\mathfrak{o}_v^{nr})$ et $e_0 \in Z(\tilde{G}, \mathcal{E}_0)(F_v^{nr})$ tels que $\nu_0e_0 \in \tilde{K}$, cf. 1.5. On peut écrire $\eta_1 = \nu_1e_0$, avec $\nu_1 \in T_0$. Puisque $\eta_1 \in \tilde{K}_v^{nr}$, on a $\nu_1 \in T_0(\mathfrak{o}_v^{nr})$. Introduisons le cocycle $z : \Gamma_{F_v} \to Z(G) \cap T_0(\mathfrak{o}_v^{nr})$ tel que $\sigma(e_0) = z(\sigma)^{-1}e_0$ et posons $\theta = ad_{e_0}$. La propriété de définition de η se transporte à η_1. C'est-à-dire qu'en identifiant W au groupe de Weyl relatif à T_0, il existe une cochaîne $t : \Gamma_{F_v} \to (1-\theta)(T_0(\bar{F}_{\bar{v}}))$ telle que $\omega_{\bar{G}}(\sigma)\sigma(\nu_1) = z(\sigma)t(\sigma)\nu_1$ pour tout $\sigma \in \Gamma_{\bar{v}}$. Puisque $\nu_1 \in T_0(\mathfrak{o}_v^{nr})$ et que ce groupe est normalisé par W, cette relation implique que $t(\sigma) \in ((1-\theta)(T_0))(\mathfrak{o}_v^{nr})$ et que $\sigma \mapsto t(\sigma)$ est un cocycle à valeurs dans ce groupe, si on munit celui-ci de l'action $\sigma \mapsto \sigma_{\bar{G}} = \omega_{\bar{G}}(\sigma)\circ\sigma$. Un tel cocycle est un cobord. De plus, l'hypothèse $v \notin V_{ram}$ implique que $1-\theta : T_0(\mathfrak{o}_v^{nr}) \to ((1-\theta)(T_0))(\mathfrak{o}_v^{nr})$ est surjective. On peut donc fixer $t_0 \in T_0(\mathfrak{o}_v^{nr})$ tel que $t(\sigma) = (1-\theta)(t_0\sigma_{\bar{G}}(t_0)^{-1})$. Posons $\nu_2 = \nu_1(1-\theta)(t_0)$. On a $\sigma_{\bar{G}}(\nu_2) = z(\sigma)\nu_2$. On introduit le groupe G_{SC}^{θ} des points fixes de θ dans G_{SC}. De $\mathcal{E}_0$ se déduit une paire de Borel épinglée de ce groupe puis un schéma en groupes $\mathcal{K}_v^1$. En appliquant 1.5(5), on construit $k \in \mathcal{K}_v^1(\mathfrak{o}_w)$ tel que, pour tout $\sigma \in \Gamma_{F_v}$, $k^{-1}\sigma(k)$ normalise T_0 et ait $\omega_{\bar{G}}(\sigma)$ pour image dans W^{θ}. On pose $\eta_\star = k\nu_2e_0k^{-1}$. Le même calcul qu'en 1.6 montre que $\eta_\star \in \tilde{K}_v$ et que la paire de Borel $(kB_0k^{-1} \cap G_{\eta_\star}, kT_0k^{-1} \cap G_{\eta_\star})$ de $G_{\eta_\star}$ est définie sur F_v. En reprenant la preuve de [W1] lemme 5.4, on peut la compléter en une paire de

Borel épinglée définie sur F_v de sorte que le schéma en groupes $\mathcal{K}_\star$ issu de cette paire vérifie la condition $\mathcal{K}_\star(\mathfrak{o}_v^{nr}) = K_v^{nr} \cap G_{\eta_\star}(\bar{F}_{\bar{v}})$. On note $\mathcal{K}_{\star,sc}$ le schéma en groupes associé dans le groupe $G_{\eta_\star,SC}$. Pour $\sigma \in \Gamma_{F_v}$, on pose $\omega_{S,\bar{G}}(\sigma) = \omega_S(\sigma)\omega_{\bar{G}}(\sigma)^{-1}$. Par définition, c'est un élément du groupe de Weyl $W^{\bar{G}}$, lequel s'identifie à $W^{G_{\eta_\star}}$. En appliquant de nouveau 1.5(5), on construit $h \in \mathcal{K}_{\star,sc}(\mathfrak{o}_w)$ tel que, pour tout $\sigma \in \Gamma_{F_v}$, $h^{-1}\sigma(h)$ normalise $kT_0k^{-1} \cap G_{\eta_\star}$ et ait pour image $\omega_{S,\bar{G}}(\sigma)$ dans $W^{G_{\eta_\star}}$. Posons $(B_\star, S_\star) = ad_{hk}(B_0, T_0)$, $t_\star = t_1 y t_0^{-1} y^{-1}$, $g_\star = yk^{-1}h^{-1}$ et $r_\star = t_\star g_\star$. On voit que $d_\star = (\eta_\star, r_\star)$ appartient à D_v, que $\eta_\star$ appartient à $\tilde{K}_v$, que la paire $(B_\star, S_\star)$ vérifie les conditions de 5.6 relatives à l'élément $d_\star$, que $t_\star \in T^*(\mathfrak{o}_v^{nr})$, que $g_\star \in K_{sc,w}$ et que $ad_{g_\star}$ envoie la paire $(B_\star, S_\star)$ sur (B^*, T^*).

Revenons à notre élément quelconque $d_v = (\eta[d_v], r[d_v]) \in D_v$ tel que $\eta[d_v] \in \tilde{K}_v$. D'après 5.5(3), on peut fixer $k_\sharp \in \underline{K}_{\sharp,v}$ et $u \in G_{\eta[d_v]}(\bar{F}_{\bar{v}})$ tels que $\eta_\star = k_\sharp^{-1}\eta[d_v]k_\sharp$ et $r_\star = r[d_v]uk_\sharp$. L'automorphisme $ad_{k_\sharp}$ envoie $G_{\eta_\star}$ sur $G_{\eta[d_v]}$ et est défini sur F_v. On peut donc prendre pour paire $(B[d_v], S[d_v])$ la paire $ad_{k_\sharp}(B_\star, S_\star)$. Comme plus haut, l'application produit

$$K_{sc,w} \times T_0(\mathfrak{o}_v^{nr}) \to K_{\sharp,w}$$

est surjective. Mais $S_\star$ est conjugué à T_0 par un élément de $K_{sc,w}$. En conjuguant la propriété ci-dessus, on obtient que l'application produit

$$K_{sc,w} \times S_\star(\mathfrak{o}_v^{nr}) \to K_{\sharp,w}$$

est surjective. On peut donc écrire $k_\sharp = zls$, avec $z \in Z(G)^\theta(\bar{F}_{\bar{v}})$, $s \in S_\star(\mathfrak{o}_v^{nr})$ et $l \in K_{sc,w}$. Posons $g_w = g_\star l^{-1}$ et $x = z^{-1}t_\star g_\star s^{-1} g_\star^{-1}$. On a $g_w \in K_{w,sc}$, $ad_{g_w}(B[d_v], S[d_v]) = (B^*, T^*)$ et $g_w = x^{-1}r[d_v]u$. Puisque $x \in T^*(\bar{F}_{\bar{v}})$, la condition (iii) est satisfaite. On a $ad_{g_w}(\eta[d_v]) = t_w\eta$, où $t_w = (\theta^* - 1)(x)$. Puisque $\eta[d_v] \in \tilde{K}_v$ et $g_w \in K_{sc,w}$, on a $ad_{g_w}(\eta[d_v]) \in \tilde{K}_w$. On a aussi $\eta \in \tilde{K}_w$ par définition de V'. L'égalité précédente entraîne alors $t_w \in (1-\theta)(T^*(\bar{F}_{\bar{v}})) \cap K_w = ((1-\theta)(T^*))(\mathfrak{o}_w)$. Enfin, puisque K_w est issu de $\mathcal{E}^*$, on a $T^*(\mathfrak{o}_w) \subset K_w$. En conjuguant par $g_w^{-1} \in K_{sc,w}$, on en déduit $S[d_v](\mathfrak{o}_w) \subset K_w$. Cela satisfait les conditions (i), (iii) et (v) en la place w. Comme on l'a vu dans la première partie de la preuve, la condition (iii) implique (ii). Pour une autre place w' de E au-dessus de v, on construit $g_{w'}$ et $t_{w'}$ comme dans cette première partie. Puisque le schéma en groupes $\mathcal{K}_v$ est défini sur $\mathfrak{o}_v$, on a $\tau(K_{sc,w}) = K_{sc,w'}$. Les conditions imposées à V' entraînent que tous les termes de la formule (iv) appartiennent à $K_{sc,w'}$ donc $g_{w'} \in K_{sc,w'}$. Le même raisonnement que dans le cas de la place w entraîne alors que $t_{w'} \in ((1-\theta)(T^*))(\mathfrak{o}_{w'})$ et que $S[d_v](\mathfrak{o}_{w'}) \subset K_{w'}$. Cela achève la preuve. □

6.8 L'ensemble D_F

On note D_F l'ensemble des couples $d = (\eta[d], r[d]) \in \tilde{G}(F) \times G(\bar{F})$ tels que

- $r[d]\eta[d]r[d]^{-1} = \eta$;

- en utilisant la paire de Borel $ad_{r[d]^{-1}}(B^*, T^*)$ dans la construction de 1.2, on ait l'égalité $(\mu_{\eta[d]}, \omega_{\eta[d]}) = (\mu, \omega_{\bar{G}})$.

Soit $d \in D_F$. On a fixé en 5.2 une paire de Borel épinglée $\bar{\mathcal{E}}$ de $\bar{G}$ définie sur $\bar{F}$. Posons $(B^*[d], T^*[d]) = ad_{r[d]^{-1}}(B^*, T^*)$, $(\bar{B}[d], \bar{T}[d]) = (B^*[d] \cap G_{\eta[d]}, T^*[d] \cap G_{\eta(d)})$ et $\bar{\mathcal{E}}[d] = ad_{r[d]^{-1}}(\bar{\mathcal{E}})$. Alors $\bar{\mathcal{E}}[d]$ est une paire de Borel épinglée de $G_{\eta[d]}$ définie sur $\bar{F}$ dont la paire de Borel sous-jacente est $(\bar{B}[d], \bar{T}[d])$. Pour tout $\sigma \in \Gamma_F$, fixons $\bar{u}[d](\sigma) \in G_{\eta[d],SC}(\bar{F})$ tel que $ad_{\bar{u}[d](\sigma)} \circ \sigma$ conserve $\bar{\mathcal{E}}[d]$. On note $\sigma \mapsto \sigma_{G^*_{\eta[d]}} = ad_{\bar{u}[d](\sigma)} \circ \sigma$ l'action quasi-déployée qui conserve $\bar{\mathcal{E}}[d]$. On suppose que $\sigma \mapsto \bar{u}[d](\sigma)$ est continue et que $\bar{u}[d](1) = 1$. La deuxième condition ci-dessus signifie que $ad_{r[d]}$, qui envoie $T^*[d]$ sur T^*, entrelace l'action $\sigma \mapsto \sigma_{G^*_{\eta[d]}}$ sur $T^*[d]$ avec l'action $\sigma \mapsto \omega_{\bar{G}}(\sigma) \circ \sigma_{G^*}$ sur T^*. Transportons par $ad_{r[d]^{-1}}$ le cocycle $\omega_{S,\bar{G}}$ en un cocycle à valeurs dans le groupe de Weyl de $G_{\eta[d]}$ relatif à $\bar{T}[d]$ (pour l'action quasi-déployée). D'après [K1] corollaire 2.2, on peut fixer $\bar{x}[d] \in G_{\eta[d],SC}(\bar{F})$ tel que, pour tout $\sigma \in \Gamma_F$, $\bar{x}[d]\sigma_{G^*_{\eta[d]}}(\bar{x}[d])^{-1}$ normalise $\bar{T}[d]$ et que son image dans le groupe de Weyl soit $\omega_{S,\bar{G}}(\sigma)$. Alors $ad_{r[d]}$ entrelace l'action $\sigma \mapsto ad_{\bar{x}[d]\sigma_{G^*_{\eta[d]}}(\bar{x}[d])^{-1}} \circ \sigma_{G^*_{\eta[d]}}$ sur $T^*[d]$ avec l'action $\sigma \mapsto \omega_S(\sigma) \circ \sigma_{G^*}$ sur T^*. Fixons une décomposition $r[d] = z[d]r[d]_{sc}$ avec $z \in Z(G;\bar{F})$ et $r[d]_{sc} \in G_{SC}(\bar{F})$. Il est facile de traduire la condition précédente par la propriété

(1) pour tout $\sigma \in \Gamma_F$, il existe $t(\sigma) \in T^*_{sc}(\bar{F})$ tel que

$$x\sigma_{G^*}(x)^{-1}u_{\mathcal{E}^*}(\sigma)\sigma(r[d]_{sc}) = t(\sigma)r[d]_{sc}\bar{x}[d]\sigma_{G^*_{\eta[d]}}(\bar{x}[d])^{-1}\bar{u}[d](\sigma).$$

Pour $d \in D_F$ et $v \in Val(F)$, on note d_v le même couple $(\eta[d], r[d])$, vu comme élément de $\tilde{G}(F_v) \times G(\bar{F}_v)$. L'application $d \mapsto (d_v)_{v \in Val(F)}$ est une injection $D_F \subset D_{\mathbb{A}_F}$. Soit $d \in D_F$. Supposons que l'image de d dans $D_{\mathbb{A}_F}$ appartienne à $D_V^{rel} \times D^{nr}_{\mathbb{A}_F^V}$. On reprend les constructions du paragraphe précédent. On impose de plus au corps E les conditions suivantes

- $z[d] \in Z(G;E)$, $r[d]_{sc} \in G_{SC}(E)$, $\bar{x}[d] \in G_{\eta[d],SC}(E)$ et $\bar{\mathcal{E}}$ est définie sur E ;

- l'application $\sigma \mapsto \bar{u}[d](\sigma)$ se factorise par $Gal(E/F)$ et prend ses valeurs dans $G_{\eta[d],SC}(E)$.

Il en résulte que l'application $\sigma \mapsto t(\sigma)$ se factorise par $Gal(E/F)$ et prend ses valeurs dans $T^*_{sc}(E)$. Construisons des paires de Borel et des éléments g et t vérifiant la proposition 6. 7.

Lemme. *Sous ces hypothèses, l'élément g appartient à $T^*_{sc}(\mathbb{A}_E)r[d]_{sc}G_{\eta[d],SC}(\mathbb{A}_E)$.*

Preuve. Soient v une place de F et w' une place de E au-dessus de v. Montrons que

(2) $g_{w'} \in T^*_{sc}(E_{w'})r[d]_{sc}G_{\eta[d],SC}(E_{w'})$.

Supposons d'abord que $w' = w$ soit la restriction de $\bar{v}$ à E. Par construction, il existe $u_1 \in G_{\eta[d]}(\bar{F}_{\bar{v}})$ de sorte que $ad_{u_1}(B[d_v], S[d_v]) = (B^*[d], T^*[d])$. Les deux couples $(B[d_v] \cap G_{\eta[d]}, S[d_v] \cap G_{\eta[d]})$ et $(B^*[d] \cap G_{\eta[d]}, T^*[d] \cap G_{\eta[d]})$ sont des paires de Borel de $G_{\eta[d]}$ qui sont définies sur E_w. Il existe donc $u \in G_{\eta[d],SC}(E_w)$ telle que la seconde soit l'image de la première par ad_u. Puisque u_1 vérifie la même propriété, on a $u_1 \in (T^*[d] \cap G_{\eta[d]})u$. Alors on a aussi $ad_u(B[d_v], S[d_v]) = (B^*[d], T^*[d])$. Donc $ad_{r[d]_{sc}u}(B[d_v], S[d_v]) = (B^*, T^*)$. Puisque g_w vérifie la même propriété et que les deux éléments $r[d]_{sc}u$ et g_w appartiennent à $G_{SC}(E_w)$, ces deux éléments diffèrent par multiplication à gauche par un élément de $T^*_{sc}(E_w)$. Cela prouve (2) pour la place w.

Considérons maintenant une autre place w' au-dessus de v. Rappelons que $g_{w'} = x\tau_{G^*}(x)^{-1}u_{\mathcal{E}^*}(\tau)\tau(g_w)$. Ecrivons $g_w = t_w r[d]_{sc}u_w$, avec $t_w \in T^*_{sc}(E_w)$ et $u_w \in G_{\eta[d],SC}(E_w)$. Posons $t_{0,w'} = ad_{x\tau_{G^*}(x)^{-1}u_{\mathcal{E}^*}(\tau)} \circ \tau(t_w)$. Comme dans la preuve de 6.7(7), on a $t_{0,w'} = \tau_S(t_w) \in T^*_{sc}(E_{w'})$. On a aussi $\tau(u_w) \in G_{\eta[d],SC}(E_{w'})$. Puisque

$$g_{w'} = t_{0,w'}x\tau_{G^*}(x)^{-1}u_{\mathcal{E}^*}(\tau)\tau(r[d]_{sc})\tau(u_w),$$

la relation (2) à prouver équivaut à

$$x\tau_{G^*}(x)^{-1}u_{\mathcal{E}^*}(\tau)\tau(r[d]_{sc}) \in T^*_{sc}(E_{w'})r[d]_{sc}G_{\eta[d],SC}(E_{w'}).$$

Mais cette relation résulte de (1) et des conditions imposées à E. Cela prouve (2) en général.

Fixons un ensemble fini V' de places de E vérifiant les conditions du paragraphe précédent ainsi que les conditions suivantes. On impose que, pour tout $v \notin V'$ et pour toute place w' de E divisant v, on ait d'abord

- $z[d] \in K_{sc,w'}$ et $r[d]_{sc} \in K_{sc,w'}$.

Il en résulte que $\eta[d] \in \tilde{K}_{w'} \cap \tilde{G}(F_v) = \tilde{K}_v$. On sait qu'alors le groupe $K_v[d] = K_v \cap G_{\eta[d]}(F_v)$ est un sous-groupe compact hyperspécial de $G_{\eta[d]}(F_v)$ (cf. lemme 1.6). Il s'en déduit un tel sous-groupe $K_{sc,v}[d]$ de $G_{\eta[d],SC}(F_v)$ puis un tel sous-groupe $K_{sc,w'}[d]$ de $G_{\eta[d],SC}(E_{w'})$. On impose de plus que

- $\bar{x}[d] \in K_{sc,w'}[d]$ et $\bar{u}[d](\sigma) \in K_{sc,w'}[d]$ pour tout $\sigma \in \Gamma_F$.

Toutes ces conditions impliquent que l'on a aussi $t(\sigma) \in T^*_{sc}(\mathfrak{o}_{w'})$ pour tout $\sigma \in \Gamma_F$, où $t(\sigma)$ est l'élément figurant dans (1).

Soient $v \notin V'$ et w' une place de E divisant v. Puisque $g_{w'}$ conjugue $S[d_v]_{sc}(E_{w'})$ en $T^*_{sc}(E_{w'})$ (où $S[d_v]_{sc}$ est l'image réciproque de $S[d_v]$ dans G_{SC}), la relation (2) équivaut à $g_{w'} \in r[d]_{sc}G_{\eta[d],SC}(E_{w'})S[d_v]_{sc}(E_{w'})$. Ecrivons $g_{w'} = r[d]_{sc}us$, avec $u \in G_{\eta[d],SC}(E_{w'})$ et $s \in S[d_v]_{sc}(E_{w'})$. Cela entraîne $us = r[d]_{sc}^{-1}g_{w'} \in K_{sc,w'}$. Appliquons l'opérateur $\theta = ad_{\eta[d]}$. Puisque $\eta[d] \in \tilde{K}_v$, θ conserve $K_{sc,w'}$. Donc $u\theta(s) = \theta(us) \in K_{sc,w'}$. D'où $(1-\theta)(s) = (u\theta(s))^{-1}us \in K_{sc,w'}$. Fixons une uniformisante ϖ de F_v, qui est aussi une uniformisante de $E_{w'}$ puisque $E_{w'}/F_v$ est non ramifiée. Puisque $S[d_v]_{sc}$ est déployé sur $E_{w'}$, l'élément s s'écrit de façon unique $s_0x_*(\varpi)$ pour un élément $s_0 \in S[d_v]_{sc}(\mathfrak{o}_{w'})$ et un élément $x_* \in X_*(S[d_v]_{sc})$. On a alors $(1-\theta)(s) = (1-\theta)(s_0)((1-\theta)(x_*))(\varpi)$. Puisque $S[d_v]_{sc}(\mathfrak{o}_{w'}) \subset K_{sc,w'}$ d'après le (i) de la proposition 6.7, cela entraîne $((1-\theta)(x_*))(\varpi) \in K_{sc,w'}$. Cette condition ne peut être réalisée que si $(1-\theta)(x_*) = 0$. Alors $x_* \in X_*(S[d_v]^{\theta,0}_{sc})$ et $x_*(\varpi) \in S[d_v]^{\theta,0}_{sc}(E_{w'})$. Ce groupe est contenu dans $G_{SC,\eta[d]}(E_{w'})$.

Remarque. Le groupe $G_{SC,\eta[d]}$ est la composante neutre du commutant de $\eta[d]$ dans G_{SC} ; on prend garde de le distinguer du groupe $G_{\eta[d],SC}$ qui est le revêtement simplement connexe du groupe dérivé de $G_{\eta[d]}$, ou encore le revêtement simplement connexe du groupe dérivé de $G_{SC,\eta[d]}$.

On a $ux_*(\varpi) = (us)s_0^{-1} \in K_{sc,w'}$. Donc $ux_*(\varpi)$ appartient au groupe $G_{SC,\eta[d]}(E_{w'}) \cap K_{sc,w'}$, qui est un sous-groupe compact hyperspécial de $G_{SC,\eta[d]}(E_{w'})$. D'après 1.5(2), il existe $s_1 \in S[d_v]_{sc}(\mathfrak{o}_{w'})$ tel que $ux_*(\varpi)$ et s_1 aient même image dans $G_{SC,\eta[d],ab}(E_{w'})$. Puisque $u \in G_{\eta[d],SC}(E_{w'})$, son image dans $G_{SC,\eta[d],ab}(E_{w'})$ est l'identité. Cela entraîne que l'image de $x_*(\varpi)s_1^{-1}$ est aussi l'identité. Donc $x_*(\varpi)s_1^{-1}$ est l'image d'un élément $s_2 \in G_{\eta[d],SC}(E_{w'})$. En notant $\bar{S}[d_v]_{sc}$ l'image réciproque de $S[d_v]$ dans $G_{\eta[d],SC}$, l'élément s_2 appartient forcément à $\bar{S}[d_v]_{sc}(E_{w'})$. Comme plus haut, on peut écrire $s_2 = \bar{s}_0\bar{x}_*(\varpi)$ avec $\bar{s}_0 \in \bar{S}[d_v]_{sc}(\mathfrak{o}_{w'})$ et $\bar{x}_* \in X_*(\bar{S}[d_v]_{sc})$. L'unicité de ces décompositions entraîne que $x_* = \bar{x}_*$. Cela entraîne que $x_*(\varpi)$ appartient à $\bar{S}[d_v]_{sc}(E_{w'})$ donc aussi à $G_{\eta[d],SC}(E_{w'})$ (plus exactement, c'est l'image dans $G_{SC}(E_{w'})$ d'un élément de ce groupe). Posons $\underline{u} = ux_*(\varpi)$. Alors $\underline{u}$ appartient à $G_{\eta[d],SC}(E_{w'})$ et son image dans $G_{SC}(E_{w'})$ appartient à $K_{sc,w'}$. Donc $\underline{u} \in K_{sc,w'}[d]$. On a $g_{w'} = r[d]_{sc}\underline{u}s_0 \in r[d]_{sc}K_{sc,w'}[d]S[d_v]_{sc}(\mathfrak{o}_{w'})$. Comme plus haut, cela implique par conjugaison que $g_{w'} \in T^*_{sc}(\mathfrak{o}_{w'})r[d]_{sc}K_{sc,w'}[d]$. Cette relation est vérifiée pour tout $v \notin V'$ et tout w' divisant v. Jointe à (2), elle entraîne le lemme. $\square$

6.9 Un résultat d'annulation

Soit $d_V = (d_v)_{v\in V} \in D^{rel}_V$. On note $D_F[d_V]$ l'ensemble des $d \in D_F$ tels que

- la projection de d dans $D_{\mathbb{A}_F^V}$ appartient à $D^{nr}_{\mathbb{A}_F^V}$;
- la projection de d dans D_V appartient à $I_\eta d_V G(F_V)$.

Pour $j \in \mathcal{J}(\mathbf{H})$, on a défini la constante $\delta_j[d_V]$ en 5.9.

Proposition. *Soit $d_V \in D_V^{rel}$. Si $D_F[d_V] = \emptyset$, alors*

$$\sum_{j \in \mathcal{J}(\mathbf{H})} \delta_j[d_V] = 0.$$

Preuve. Ce résultat est trivial si $\mathcal{J}(\mathbf{H})$ est vide. On suppose cet ensemble non vide. Alors l'application $\mathbf{p}$ de 6.4 l'identifie à $P(\mathbf{H})$, qui est une unique classe modulo le sous-groupe $P^0 \subset P$ de 6.6. Fixons $p \in P(\mathbf{H})$. Soit $p^0 \in P^0$. Posons $j = \mathbf{p}^{-1}(p)$ et $j' = \mathbf{p}^{-1}(p^0 p)$. On va calculer le rapport $\delta_{j'}[d_V]\delta_j[d_V]^{-1}$.

On dispose des paires de Borel (B_j, S_j) de G'_j et $(B_{j'}, S_{j'})$ de $G'_{j'}$ dont les groupes de Borel sont définis sur $\bar{F}$ et les tores sont définis sur F. Par construction, on a des isomorphismes

$$X_{*,\mathbb{Q}}(S_j) \simeq X_{*,\mathbb{Q}}(S_{\bar{H}}) \oplus X_{*,\mathbb{Q}}(Z(\bar{G})^0) \simeq X_{*,\mathbb{Q}}(S_{j'})$$

qui sont équivariants pour les actions galoisiennes. En fait, l'isomorphisme composé provient d'un isomorphisme $S_j \simeq S_{j'}$ sur $\bar{F}$, qui est le composé de $S_j \simeq T^*/(1-\theta^*)(T^*) \simeq S_{j'}$. Puisque l'isomorphisme $X_{*,\mathbb{Q}}(S_j) \simeq X_{*,\mathbb{Q}}(S_{j'})$ qui s'en déduit fonctoriellement est équivariant pour les actions galoisiennes, l'isomorphisme $S_j \simeq S_{j'}$ est lui-même défini sur F.

On complète la donnée d_V en fixant un élément $d^V = (d_v)_{v \notin V} \in D^{nr}_{\mathbb{A}_F^V}$ et en posant $d = d_V \times d^V = (d_v)_{v \in Val(F)}$. On applique à cet élément la proposition 6.7. On en déduit des paires de Borel $(B[d_v], S[d_v])$ pour toute place $v \in Val(F)$ et des éléments $g \in G_{SC}(\mathbb{A}_E)$ et $t \in ((1-\theta^*)(T^*))(\mathbb{A}_E)$. Pour toute place v, les sextuplets

$$(\epsilon_j, B_j, S_j, B[d_v], S[d_v], \eta[d_v])$$

et

$$(\epsilon_{j'}, B_{j'}, S_{j'}, B[d_v], S[d_v], \eta[d_v])$$

sont des diagrammes.

Pour $v \in V$, on fixe des éléments $\bar{Y}_{sc,v} \in \mathfrak{s}_{\bar{H}}(F_v)$, $Z_1 \in \mathfrak{z}(\bar{G}; F_v)$ et $Z_2 \in \mathfrak{z}(\bar{H}; F_v)$. On les suppose en position générale et proches de 0. On construit comme en 5.7 un élément $X[d_v] \in \mathfrak{g}_{\eta[d_v]}(F_v)$ dont on peut supposer qu'il appartient à $\mathfrak{s}[d_v]^\theta(F_v)$. On construit les éléments $Y_{j,v}$ et $Y_{j',v}$ comme en 5.7. On peut supposer que $Y_{j,v}$ appartient à $\mathfrak{s}_j(F_v)$, plus précisément que $Y_{j,v}$ est l'image de $X[d_v]$ par l'homomorphisme $\mathfrak{s}[d_v](F_v) \to \mathfrak{s}_j(F_v)$ provenant du premier diagramme ci-dessus. On peut supposer que $Y_{j',v}$ vérifie des propriétés analogues. Alors $Y_{j,v}$ et $Y_{j',v}$ se correspondent via l'isomorphisme ci-dessus entre S_j et $S_{j'}$. On en fixe des relèvements $Y_{j,1,v} \in \mathfrak{g}'_{j,1,\epsilon_{j,1}}(F_v)$ de $Y_{j,v}$ et $Y_{j',1,v} \in \mathfrak{g}'_{j',1,\epsilon_{j',1}}(F_v)$ de $Y_{j',v}$, que l'on suppose proches de 0 . On pose $x[d_v] = exp(X[d_v])$, $y_{j,v} = exp(Y_{j,v})$, $y_{j',v} = exp(Y_{j',v})$, $y_{j,1,v} = exp(Y_{j,1,v})$, $y_{j',1,v} = exp(Y_{j',1,v})$. Les sextuplets

$$(y_{j,v}\epsilon_j, B_j, S_j, B[d_v], S[d_v], x[d_v]\eta[d_v])$$

et

$$(y_{j',v}\epsilon_{j'}, B_{j'}, S_{j'}, B[d_v], S[d_v], x[d_v]\eta[d_v])$$

sont des diagrammes.

Pour $v \notin V$, on fixe des éléments $x[d_v] \in S[d_v]^{\theta,0}(F_v)$, $y_{j,v} \in S_j(F_v)$ et $y_{j',v} \in S_{j'}(F_v)$ de sorte que les sextuplets ci-dessus soient encore des diagrammes. On impose que $x[d_v]\eta[d_v]$ est fortement régulier. Pour presque tout v, $S[d_v]$ est non ramifié et possède une structure naturelle sur $\mathfrak{o}_v$. On impose $x[d_v] \in S[d_v]^{\theta,0}(\mathfrak{o}_v)$ pour presque tout v. D'après le (i) de la proposition 6.7, cela entraîne que $x[d_v]\eta[d_v] \in \tilde{K}_v$ pour presque tout v. Cela entraîne aussi que $y_{j,v} \in \tilde{K}'_{j,v}$ et $y_{j',v} \in \tilde{K}'_{j',v}$ pour presque tout v. Enfin, on impose que $x[d_v]\eta[d_v]$ vérifie la condition [VI] 3.6(2) pour presque tout v. C'est loisible car, d'après la même preuve que celle de [VI] 3.6(15), on peut choisir pour presque tout v un élément $x[d_v] \in S[d_v]^{\theta,0}(\mathfrak{o}_v)$ tel que cette condition soit vérifiée. On relève $y_{j,v}$ et $y_{j',v}$ en des éléments $y_{j,1,v}$ et $y_{j',1,v}$. On suppose comme il est loisible que $y_{j,1,v} \in \tilde{K}'_{j,1,v}$ et $y_{j',1,v} \in \tilde{K}'_{j',1,v}$ pour presque tout v.

On supprime les indices v pour noter les produits sur toutes les places de F. Par exemple $x[d] = \prod_{v \in Val(F)} x[d_v]$. On remplace ces indices v par V pour noter les produits sur $v \in V$, par exemple $x[d]_V = \prod_{v \in V} x[d_v]$. Par définition $\delta_{j'}[d_V]\delta_j[d_V]^{-1}$ est la limite quand les termes $Y_{j,1,V}$ et $Y_{j',1,V}$ tendent vers 0 de

$$\Delta_{j',1,V}(y_{j',1}\epsilon_{j',1}, x[d_V]\eta[d_V])\Delta_{j,1,V}(y_{j,1}\epsilon_{j,1}, x[d_V]\eta[d_V])^{-1}.$$

Par définition, ce rapport est le produit du quotient des facteurs globaux de [VI] 3.6

$$(1) \qquad \Delta_{j',1}(y_{j',1}\epsilon_{j',1}, x[d]\eta[d])\Delta_{j,1}(y_j\epsilon_{j,1}, x[d]\eta[d])^{-1}$$

et du produit pour toute place $v \notin V$ des quotients des facteurs normalisés

$$(2) \qquad \Delta_{j',1,v}(y_{j',1}\epsilon_{j',1}, x[d_v]\eta[d_v])^{-1}\Delta_{j,1,v}(y_{j,1}\epsilon_{j,1}, x[d_v]\eta[d_v]).$$

On a

(3) quitte à remplacer en un nombre fini de places hors de V les termes $x[d_v]$, $y_{j,1,v}$ et $y_{j',1,v}$ par d'autres termes assez proches des éléments neutres, le quotient (2) vaut 1 pour tout $v \notin V$.

Comme on l'a vu en [VI] 3.6, les deux termes de ce rapport valent 1 en presque toute place, disons pour $v \notin V''$, où V'' est un ensemble fini de places contenant V. Pour $v \in V'' - V$, remplaçons les termes $x[d_v]$, $y_{j,1,v}$ et $y_{j',1,v}$ par d'autres termes assez proches des éléments neutres. Le théorème 5.7(i) dit que le rapport est alors égal à $\delta_j[d_v]\delta_{j'}[d_v]^{-1}$, ces termes étant définis comme dans ce paragraphe. Le (iii) du même théorème dit que ce rapport vaut 1. D'où (3).

On doit calculer le quotient (1), ou plus exactement sa limite quand les composantes $y_{j,1,v}$ et $y_{j',1,v}$ tendent vers 1 pour tout $v \in V$ (dans la suite, on dira simplement "sa limite"). Comme ci-dessus, on peut s'autoriser à remplacer en un nombre fini de places hors de V les termes $x[d_v]$, $y_{j,1,v}$ et $y_{j',1,v}$ par d'autres termes assez proches des éléments neutres. On se reporte à la définition de [VI] 3.6. L'automorphisme ad_g envoie $S[d](\mathbb{A}_E)$ sur $S(\mathbb{A}_E)$ de façon équivariante pour l'action de $Gal(E/F)$. En particulier, il envoie $x[d]$ sur un élément de $S(\mathbb{A}_F)$. que l'on note $x_S[d] = \prod_{v \in Val(F)} x_S[d_v]$. D'autre part, on a $ad_g(\eta[d]) = t\eta$. D'où $ad_g(x[d]\eta[d]) = x_S[d]t\eta$.

Posons

$$\Delta_{j',j,II}[d] = \Delta_{j',II}(y_{j'}\epsilon_{j'}, x[d]\eta[d])\Delta_{j,II}(y_j\epsilon_{j'}, x[d]\eta[d])^{-1}.$$

Montrons que

(4) quitte à remplacer en un nombre fini de places hors de V les termes $x[d_v]$, $y_{j,1,v}$ et $y_{j',1,v}$ par d'autres termes assez proches des éléments neutres, on a

$$lim\,\Delta_{j',j,II}[d]=1.$$

On note $\Sigma(S)_{res}$ l'ensemble des restrictions à $S^{\theta^*,0}=T^{*,\theta^*,0}$ des racines de S dans G et $\Sigma(S)_{res,ind}$ le sous-ensemble des éléments indivisibles. Les termes intervenant dans $\Delta_{j',j,II}[d]$ sont produits de termes indexés par les orbites de Γ_F dans l'ensemble $\Sigma(S)_{res,ind}$.

Considérons une orbite galoisienne d'un élément $\alpha_{res}\in\Sigma(S)_{res,ind}$ qui se relève en une racine $\alpha\in\Sigma(S)$ de type 1. Une telle racine contribue au numérateur comme au dénominateur de $\Delta_{j',j,II}[d]$ soit par 1, soit par

$$(5)\qquad \chi_{\alpha_{res}}(\frac{(N\alpha)(x_S[d]\nu)-1}{a_{\alpha_{res}}})$$

(le terme t disparaît quand on applique $N\alpha$). Si $(N\alpha)(\nu)\neq 1$, on peut fixer un ensemble V'' de places contenant V et assez grand pour que, pour $v\notin V''$, on ait

$$\chi_{\alpha_{res},v}(\frac{(N\alpha)(x_S[d_v]\nu)-1}{a_{\alpha_{res}}})=\chi_{\alpha_{res},v}(\frac{(N\alpha)(\nu)-1}{a_{\alpha_{res}}})=1.$$

Pour $v\in V''-V$, quitte à remplacer nos données $x[d_v]$ etc... par des termes assez proches des éléments neutres, on peut supposer que l'on a

$$\chi_{\alpha_{res},v}(\frac{(N\alpha)(x_S[d_v]\nu)-1}{a_{\alpha_{res}}})=\chi_{\alpha_{res},v}(\frac{(N\alpha)(\nu)-1}{a_{\alpha_{res}}}).$$

Pour $v\in V$, on a en tout cas

$$lim\,\chi_{\alpha_{res},v}(\frac{(N\alpha)(x_S[d_v]\nu)-1}{a_{\alpha_{res}}})=\chi_{\alpha_{res},v}(\frac{(N\alpha)(\nu)-1}{a_{\alpha_{res}}}).$$

Ainsi, la limite de l'expression (5) est $\chi_{\alpha_{res}}(\frac{(N\alpha)(\nu)-1}{a_{\alpha_{res}}})$, qui vaut 1 puisque les éléments qui interviennent appartiennent à F_α et que le caractère $\chi_{\alpha_{res}}$ est automorphe. Donc la racine α_{res} ne contribue pas à $lim\,\Delta_{j',j,II}[d]$ si $(N\alpha)(\nu)\neq 1$. Supposons $(N\alpha)(\nu)=1$. Dans ce cas, α_{res} est une racine de $\bar{G}$. Mais alors, par construction, on a les égalités $(N\hat{\alpha})(s_{j'})=(N\hat{\alpha})(s_j)=(N\hat{\alpha})(\bar{s})$. Les conditions $(N\hat{\alpha})(s_{j'})=1$ et $(N\hat{\alpha})(s_j)=1$ sont équivalentes. Donc α_{res} contribue au numérateur de $\Delta_{j',j,II}[d]$ si et seulement si elle contribue au dénominateur. Quand elles contribuent, leur contributions sont toutes deux égales. Donc α_{res} ne contribue pas au quotient.

Considérons maintenant une orbite galoisienne d'un élément $\alpha_{res}\in\Sigma(S)_{res,ind}$ qui se relève en une racine $\alpha\in\Sigma(S)$ de type 2. Une telle racine contribue au numérateur comme au dénominateur de $\Delta_{j',j,II}[d]$ soit par 1, soit par $\chi_{\alpha_{res}}(\frac{(N\alpha)(x_S[d]\nu)^2-1}{a_{\alpha_{res}}})$, soit par $\chi_{\alpha_{res}}((N\alpha)(x_S[d]\nu)+1)$. Si $(N\alpha)(\nu)\neq\pm1$, le même raisonnement que ci-dessus montre que α_{res} ne contribue pas à $lim\,\Delta_{j',j,II}[d]$. Supposons $(N\alpha)(\nu)=1$. Le même raisonnement montre que la troisième contribution possible est triviale et que l'on peut remplacer la seconde par $\chi_{\alpha_{res}}((N\alpha)(x_S[d]\nu)-1)$. La condition $(N\alpha)(\nu)=1$ signifie que α_{res} est une racine de $\bar{G}$ et $2N\hat{\alpha}$ est une racine de $\hat{\bar{G}}$. On a alors les égalités $(N\hat{\alpha})(s_{j'})^2=(N\hat{\alpha})(s_j)^2=(N\hat{\alpha})(\bar{s})^2$. Les conditions $(N\hat{\alpha})(s_{j'})^2=1$ et $(N\hat{\alpha})^2(s_j)=1$ sont équivalentes et de nouveau, α_{res} contribue de la même façon au numérateur et au dénominateur de $\Delta_{j',j,II}[d]$. Donc α_{res} ne contribue pas au quotient. Supposons enfin $(N\alpha)(\nu)=-1$. Le même raisonnement que ci-dessus montre que les deux contributions non triviales possibles sont toutes deux égales à $\chi_{\alpha_{res}}((N\alpha)(x_S[d]\nu)+1)$. Ce terme intervient au numérateur si et seulement si $(N\hat{\alpha})(s_{j'})\neq 1$ et au dénominateur si et seulement si $(N\hat{\alpha})(s_j)\neq 1$. La condition $(N\alpha)(\nu)=-1$ signifie que $2\alpha_{res}$ est une racine de $\bar{G}$ et $N\hat{\alpha}$ est une racine de $\hat{\bar{G}}$. On a de nouveau $(N\hat{\alpha})(s_{j'})=(N\hat{\alpha})(s_j)=(N\hat{\alpha})(\bar{s})$. Les conditions $(N\hat{\alpha})(s_{j'})\neq 1$ et $(N\hat{\alpha})(s_j)\neq 1$ sont équivalentes et, comme précédemment, α_{res} ne contribue pas à $\Delta_{j',j,II}[d]$. Cela prouve (4).

La limite du quotient (1) est donc la même que celle du quotient

$$(6)\qquad \Delta_{j',imp}(y_{j',1}\epsilon_{j',1},x[d]\eta[d])\Delta_{j',imp}(y_j\epsilon_{j,1},x[d]\eta[d])^{-1}.$$

On utilise les définitions de [VI] 3.6. On y remplace les T par des S et on ajoute des indices j ou j'. Le dénominateur de (6) est l'inverse d'un produit $<h,\hat{h}>$ dans

$$H^{1,0}(\mathbb{A}_F/F;S_{sc}\stackrel{1-\theta}{\to}\mathcal{S}_{j,1})\times H^{1,0}(W_F;\hat{\mathcal{S}}_{j,1}\stackrel{1-\hat{\theta}}{\to}\hat{S}_{ad}).$$

L'élément $h\in H^{1,0}(\mathbb{A}_F/F;S_{sc}\stackrel{1-\theta}{\to}\mathcal{S}_{j,1})$ intervenant est un couple formé d'un cocycle V_S à valeurs dans $S_{sc}(\mathbb{A}_E)/S_{sc}(E)$ et d'un élément de $\mathcal{S}_{j,1}(\mathbb{A}_E)/\mathcal{S}_{j,1}(E)$. Rappelons la définition de V_S. Avec les notations de 6.7, on a

$$V_S(\sigma)=x\sigma_{G^*}(x)^{-1}u_{\mathcal{E}^*}(\sigma)\sigma(g)g^{-1}$$

pour tout $\sigma\in\Gamma_F$. Comme on le voit, ce terme ne dépend pas de j. On note $e_j\in\mathcal{Z}(\tilde{G}'_j;E)$ l'image naturelle de e et on relève cet élément en un élément $e_{j,1}\in\mathcal{Z}(\tilde{G}'_{j,1};E)$. On écrit $\epsilon_{j,1}=\mu_{j,1}e_{j,1}$. L'élément de $\mathcal{S}_{j,1}(\mathbb{A}_E)/\mathcal{S}_{j,1}(E)$ intervenant est l'image du couple $(x_S[d]t\nu,y_{j,1}\mu_{j,1})\in S(\mathbb{A}_E)\times S_{j,1}(\mathbb{A}_E)$ dans $\mathcal{S}_{j,1}(\mathbb{A}_E)/\mathcal{S}_{j,1}(E)$. Un calcul déjà fait de nombreuses fois montre que la contribution de $(x_S[d],y_{j,1})$ est la valeur en ce point d'un caractère automorphe de $\mathcal{S}_{j,1}(\mathbb{A}_F)$. On peut fixer un ensemble fini de places V'' contenant V tel que le caractère vaille 1 aux composantes hors de V'' de ce point, puis supposer les composantes dans $V''-V$ assez proches de l'élément neutre pour que le caractère vaille aussi 1 sur ces composantes. Modulo ces modifications, la limite de la valeur du caractère quand les composantes dans V tendent vers l'élément neutre vaut 1. Donc, pour calculer notre limite, on peut remplacer le couple $(x_S[d]t\nu,y_{j',1}\mu_{j,1})$ par $(t\nu,\mu_{j,1})$. Mais ν et $\mu_{j,1}$ sont des éléments de $S(E)$ et $S_{j,1}(E)$. Ils disparaissent dans $\mathcal{S}_{j,1}(\mathbb{A}_E)/\mathcal{S}_{j,1}(E)$. Le terme t est l'image de ce même terme considéré comme un élément de $((1-\theta)(S))(\mathbb{A}_E)/((1-\theta)(S))(E)$. On vérifie que le couple (V_S,t) définit un cocycle dans $Z^{1,0}(\mathbb{A}_F/F;S_{sc}\stackrel{1-\theta}{\to}(1-\theta)(S))$. Notre élément h est l'image de ce cocycle par l'homomorphisme naturel

$$Q=H^{1,0}(\mathbb{A}_F/F;S_{sc}\stackrel{1-\theta}{\to}(1-\theta)(S))\to H^{1,0}(\mathbb{A}_F/F;S_{sc}\stackrel{1-\theta}{\to}\mathcal{S}_{j,1}).$$

Le tore dual de $(1-\theta)(S)$ est $\hat{S}/\hat{S}^{\hat{\theta},0}$. Par compatibilité des produits, on a l'égalité $<h,\hat{h}>=<(V_S,t),\hat{h}'>$, où $\hat{h}'$ est l'image de $\hat{h}$ par l'homomorphisme dual

$$H^{1,0}(W_F;\hat{\mathcal{S}}_{j,1}\stackrel{1-\hat{\theta}}{\to}\hat{S}_{ad})\to P=H^{1,0}(W_F;\hat{S}/\hat{S}^{\hat{\theta},0}\stackrel{1-\hat{\theta}}{\to}\hat{S}_{ad}).$$

Il suffit de comparer les définitions pour constater que $\hat{h}'$ n'est autre que $\mathbf{p}(j)=p$. La limite du dénominateur de (6) est donc égale à $<(V_S,t),p>^{-1}$. Un même calcul s'applique au numérateur : sa limite est $<(V_S,t),p^0p>^{-1}$. On obtient que la limite de (6) est $<(V_S,t),p^0>^{-1}$. Cela achève le calcul de notre rapport

$$\delta_{j'}[d_V]\delta_j[d_V]^{-1}=<(V_S,t),p^0>^{-1}.$$

La somme de l'énoncé de la proposition est donc égale à

$$\delta_j[d_V]\sum_{p^0\in P^0}<(V_S,t),p^0>^{-1}.$$

Cette somme est nulle si (V_S,t) n'appartient pas à l'annulateur de P^0, c'est-à-dire à Q_0 d'après le lemme 6.6. Pour établir la proposition, il suffit donc de prouver que, si (V_S,t) appartient à Q_0, alors $D_F[d_V]\neq\emptyset$.

On va d'abord prouver

(7) supposons que (V_S,t) appartienne à Q_0 ; alors il existe un élément d' vérifiant les mêmes hypothèses que d et tel que son couple associé (V'_S,t') appartienne à $\mathbf{q}_1(Q_1)$.

D'après le lemme 6.3, l'application $G(\mathbb{A}_F)\to Q_2$ est surjective. D'après 6.2(1), l'application naturelle $\prod_{v\not\in V}K_{\sharp,v}\to Q_3$ est surjective. L'hypothèse signifie qu'il existe $\beta\in Q_1$, $h=(h_v)_{v\in Val(F)}\in G(\mathbb{A}_F)$ et $k_\sharp=(k_{\sharp,v})_{v\not\in V}\in\prod_{v\not\in V}K_{\sharp,v}$ de sorte que $(V_S,t)=\mathbf{q}_1(\beta)\mathbf{q}_2(h)\mathbf{q}_3(k_\sharp)$, où on identifie h et $k_\sharp$ à leurs images dans Q_2 et Q_3. Pour presque tout v, h_v appartient à K_v. Alors l'image de h_v par $\mathbf{q}_2$ est la même que l'image par $\mathbf{q}_3$ de l'image naturelle de h_v dans $K_{\sharp,v}$. Quitte à modifier $k_{\sharp,v}$, on peut donc supposer $h_v=1$. On peut donc fixer un ensemble fini V'' de places de F, contenant V, tel que $h_v=1$ pour $v\not\in V''$. On peut imposer de plus que S est non ramifié hors de V''. Pour $v\not\in V''$, l'image de $K_{\sharp,v}$ dans $G_{\sharp,ab}(F_v)$ coïncide avec celle de $(S[d_v]/Z(G)^\theta)(\mathfrak{o}_v)$ (cf. 1.5(2)). On peut donc supposer que $k_{\sharp,v}$ est un élément de $(S[d_v]/Z(G)^\theta)(\mathfrak{o}_v)$. Pour tout v, on relève $k_{\sharp,v}$ en un élément $\underline{k}_{\sharp,v}\in\underline{K}_{\sharp,v}$ (on rappelle que ce groupe est l'image réciproque de $K_{\sharp,v}$ dans $G(\bar{F}_v)$). Pour unifier l'écriture, on pose $\underline{k}_{\sharp,v}=1$ pour $v\in V$. Pour tout v, on définit l'élément $d'_v=(\eta[d'_v],r[d'_v])$ par $\eta[d'_v]=ad_{(h_v\underline{k}_{\sharp,v})^{-1}}(\eta[d_v])$, $r[d'_v]=r[d_v]h_v\underline{k}_{\sharp,v}$. La famille $d'=(d'_v)_{v\in Val(F)}$ appartient encore à $D_{\mathbb{A}_F}$ car, pour $v\not\in V''$, $\eta[d'_v]=(1-\theta)(\underline{k}_{\sharp,v})\eta[d_v]\in((1-\theta)(S[d_v]))(\mathfrak{o}_v)\eta[d_v]$ et cet ensemble est contenu dans $K_v\eta[d_v]$ pour presque tout v d'après le (i) de la proposition 6.7. Pour $v\not\in V$, d_v appartient à D_v^{nr} et le lemme 5.5 entraîne que $d'_v\in D_v^{nr}$. La projection de d' dans D_V appartient à $d_VG(F_V)$ puisque $d'_v=d_vh_v$ pour $v\in V$. Pour tout $v\in Val(F)$, posons $(B[d'_v],S[d'_v])=ad_{(h_v\underline{k}_{\sharp,v})^{-1}}(B[d_v],S[d_v])$. Puisque $ad_{(h_v\underline{k}_{\sharp,v})^{-1}}$ est défini sur F_v, cette paire vérifie pour d'_v les mêmes conditions que $(B[d_v],S[d_v])$ pour d_v. De plus, on a $(B[d'_v],S[d'_v])=(B[d_v],S[d_v])$ pour $v\not\in V''$ puisqu'alors $h_v=1$ et $\underline{k}_{\sharp,v}\in S[d_v](\bar{F}_v)$. Soit v une place de F, notons w la restriction de $\bar{v}$ à E. Les deux paires $(B[d_v],S[d_v])$ et $(B[d'_v],S[d'_v])$ étant déployées sur E_w, on peut fixer $\mathbf{g}_w\in G_{SC}(E_w)$ tel que $ad_{\mathbf{g}_w}(B[d'_v],S[d'_v])=(B[d_v],S[d_v])$. Les deux paires étant égales pour $v\not\in V''$, on suppose $\mathbf{g}_w=1$ dans ce cas. Puisque $h_v\underline{k}_{\sharp,v}$ vérifie la même condition que $\mathbf{g}_w$, c'est-à-dire $ad_{h_v\underline{k}_{\sharp,v}}(B[d'_v],S[d'_v])=(B[d_v],S[d_v])$, il existe $c_w\in S[d_v]$ tel que $h_v\underline{k}_{\sharp,v}=c_w\mathbf{g}_w$. On a $ad_{\mathbf{g}_w}(\eta[d'_v])=\mathbf{t}_w\eta[d_v]$, où $\mathbf{t}_w=(\theta-1)(c_w)$. Cette relation entraîne que $\mathbf{t}_w\in((1-\theta)(S[d_v]))(E_w)$. De plus, on a $c_w=\underline{k}_{\sharp,v}$ pour $v\not\in V''$, donc $\mathbf{t}_w\in((1-\theta)(S[d_v]))(\mathfrak{o}_v)$ dans ce cas. Pour une autre place w' de E au-dessus de v, on a fixé $\tau\in\Gamma_F$ tel que $\tau(w)=w'$, on pose $\mathbf{g}_{w'}=\tau(\mathbf{g}_w)$ et $\mathbf{t}_{w'}=\tau(\mathbf{t}_w)$. On pose $\mathbf{g}=(\mathbf{g}_{w'})_{w'\in Val(E)}$ et $\mathbf{t}=(\mathbf{t}_{w'})_{w'\in Val(E)}$. On voit alors que les paires $(B[d'_v],S[d'_v])$ pour $v\in Val(F)$ et les éléments $g'=g\mathbf{g}$ et $t'=t\,ad_g(\mathbf{t})$ satisfont les conditions de la proposition 6.7 pour l'élément d'.

On peut reprendre nos constructions pour l'élément d' et ces données auxiliaires. On affecte d'un $'$ les objets obtenus. On calcule

$$V'_S(\sigma) = V_S(\sigma)ad_g(\sigma(\mathbf{g})\mathbf{g}^{-1})$$

pour tout $\sigma \in \Gamma_F$. Le couple (V'_S, t') est donc le produit de (V_S, t) et du cocycle $(ad_g(\chi), ad_g(\mathbf{t}))$, où $\chi(\sigma) = \sigma(\mathbf{g})\mathbf{g}^{-1}$. Pour $v \in Val(F)$, on définit le cocycle localisé $(ad_{g_w}(\chi_v), ad_{g_w}(\mathbf{t}_w))$, où $\chi_v(\sigma) = \sigma(\mathbf{g}_w)\mathbf{g}_w^{-1}$ pour $\sigma \in \Gamma_{F_v}$. Alors $(ad_g(\chi), ad_g(\mathbf{t}))$ est l'image naturelle dans Q de l'élément de $H^{1,0}(\mathbb{A}_F; S_{sc} \stackrel{1-\theta}{\to} (1-\theta)(S))$ dont la composante en une place v est $(ad_{g_w}(\chi_v), ad_{g_w}(\mathbf{t}_w))$. Ce dernier est un élément de $H^{1,0}(F_v; S_{sc} \stackrel{1-\theta}{\to} (1-\theta)(S))$. D'autre part, il résulte des définitions que $\mathbf{q}_2(h_v)\mathbf{q}_3(k_{\sharp,v})$ est l'image de $(h_v, k_{\sharp,v})$ par la suite d'applications suivantes :

- on envoie $(h_v, k_{\sharp,v})$ sur le produit des images de h_v et $k_{\sharp,v}$ dans $G_{\sharp,ab}(F_v)$;

- on envoie $G_{\sharp,ab}(F_v)$ dans $H^{1,0}(F_v; S_{sc} \stackrel{1-\theta}{\to} (1-\theta)(S))$ par la suite d'applicatons

$$G_{\sharp,ab}(F_v) \simeq H^{1,0}(F_v; S_{sc}[d_v] \to S[d_v]/Z(G)^{\theta,0}) \to H^{1,0}(F_v; S_{sc}[d_v] \stackrel{1-\theta}{\to} (1-\theta)(S[d_v]))$$

$$\stackrel{ad_{g_w}}{\simeq} H^{1,0}(F_v; S_{sc} \stackrel{1-\theta}{\to} (1-\theta)(S));$$

- on envoie $H^{1,0}(F_v; S_{sc} \stackrel{1-\theta}{\to} (1-\theta)(S))$ dans Q par la même application que plus haut.

En se rappelant les égalités $h_v\underline{k}_{\sharp,v} = c_w\mathbf{g}_w$ et $\mathbf{t}_w = (\theta-1)(c_w)$ et les définitions, on voit que l'image de $(h_v, k_{\sharp,v})$ dans $H^{1,0}(F_v; S_{sc}[d_v] \to S[d_v]/Z(G)^{\theta,0})$ est (χ_v^{-1}, c_w), donc son image dans $H^{1,0}(F_v; S_{sc} \stackrel{1-\theta}{\to} (1-\theta)(S))$ est $(ad_{g_w}(\chi_v^{-1}), ad_{g_w}(\mathbf{t}_w^{-1}))$. On obtient que $\mathbf{q}_2(h_v)\mathbf{q}_3(k_{\sharp,v})$ est l'inverse de l'image de $(ad_{g_w}(\chi_v), ad_{g_w}(\mathbf{t}_w))$ dans Q. Donc (V'_S, t') est égal au produit de (V_S, t) et de $\mathbf{q}_2(h)^{-1}\mathbf{q}_3(k_\sharp)^{-1}$. D'où $(V'_S, t') = \mathbf{q}_1(\beta)$. Cela prouve (7).

Il reste à prouver

(8) supposons que (V_S, t) appartienne à $\mathbf{q}_1(Q_1)$; alors $D_F[d_V] \neq \emptyset$.

Supposons $(V_S, t) = \mathbf{q}_1(\beta)$, où $\beta \in Q_1 = H^1(\mathbb{A}_F/F; S_{\bar{H}})$. On relève β en une cochaîne encore notée β à valeurs dans $S_{\bar{H}}(\mathbb{A}_{\bar{F}})$, que l'on pousse en une cochaîne à valeurs dans $S_{sc}(\mathbb{A}_{\bar{F}})$. Il est maintenant plus commode d'identifier S à T^*, muni de l'action galoisienne $\sigma \mapsto \sigma_S$. Notons que le tore $S_{\bar{H}}$ s'identifie à l'image réciproque $\bar{T}_{sc}$ dans $\bar{G}_{SC}$ du sous-tore maximal $\bar{T} = T^{\theta^*,0}$ de $\bar{G}$. L'égalité $(V_S, t) = q(\beta)$ signifie qu'il existe un élément $t_{sc} \in T^*_{sc}(\mathbb{A}_{\bar{F}})$ de sorte que l'on ait les relations

$$(9) \qquad V_S(\sigma)\sigma_S(t_{sc})^{-1}t_{sc} \in \beta(\sigma)T^*_{sc}(\bar{F})$$

pour tout $\sigma \in \Gamma_F$ et

$$tt_{sc}^{-1}\theta(t_{sc}) \in ((1-\theta)(T^*))(\bar{F}).$$

Fixons un tel élément. On a $((1-\theta)(T^*))(\bar{F}) = (1-\theta)(T^*(\bar{F}))$. Il existe donc $t' \in T^*(\bar{F})$ tel que $t^{-1}(1-\theta)(t_{sc}) = (1-\theta)(t')$. On écrit $t' = t'_{sc}z'$, avec $t'_{sc} \in T^*_{sc}(\bar{F})$ et $z' \in Z(G; \bar{F})$. On peut remplacer t_{sc} par $t_{sc}(t'_{sc})^{-1}$ sans perturber la relation (9). On peut donc supposer qu'il existe $z' \in Z(G; \bar{F})$ tel que $t^{-1}(1-\theta)(t_{sc}) = (1-\theta)(z')$. On peut remplacer g par $t_{sc}^{-1}g$. Cela ne perturbe pas les conditions imposées à cet élément. Evidemment, le nouvel élément obtenu n'a pas de raison d'appartenir à $G_{SC}(\mathbb{A}_E)$. Mais on peut à ce point oublier cette propriété et considérer g comme un élément de $G_{SC}(\mathbb{A}_{\bar{F}})$ (ou bien, on étend E de sorte que t_{sc} appartienne à $T^*_{sc}(\mathbb{A}_E)$). En modifiant ainsi g, le cocycle V_S est remplacé par $\sigma \mapsto V_S(\sigma)\sigma_S(t_{sc})^{-1}t_{sc}$ et l'élément t est remplacé par $t(\theta-1)(t_{sc})$. Donc, pour ce nouveau choix d'élément g, on a

$$(10) \qquad V_S(\sigma) \in \beta(\sigma)T^*_{sc}(\bar{F})$$

pour tout $\sigma \in \Gamma_F$ et $t^{-1} = (1-\theta)(z')$, avec $z' \in Z(G;\bar{F})$.

Pour $\sigma \in \Gamma_F$, on pose

$$A(\sigma) = \beta(\sigma)V_S(\sigma)^{-1} \text{ et } X(\sigma) = A(\sigma)x\sigma_{G^*}(x)^{-1} = \beta(\sigma)g\sigma(g)^{-1}u_{\mathcal{E}^*}(\sigma)^{-1}.$$

D'après (10), A est une cochaîne à valeurs dans $T^*_{sc}(\bar{F})$, donc X prend ses valeurs dans $G_{sc}(\bar{F})$. On calcule

$$ad_{X(\sigma)u_{\mathcal{E}^*}(\sigma)} \circ \sigma(\eta) = ad_{\beta(\sigma)g\sigma(g)^{-1}} \circ \sigma(\eta) = ad_{\beta(\sigma)g}(\sigma(g)^{-1}\sigma(\eta)\sigma(g)) = ad_{\beta(\sigma)g} \circ \sigma(g^{-1}\eta g).$$

Par définition de g et t, on a $g^{-1}t\eta g = \eta[d]$. Puisque $t = (\theta-1)(z')$ est central, cela implique $g^{-1}\eta g = t^{-1}\eta[d]$. L'élément $\eta[d]$ est fixe par Γ_F. D'où

$$ad_{\beta(\sigma)} \circ \sigma(g^{-1}\eta g) = ad_{\beta(\sigma)g}(\sigma(t^{-1})\eta[d]) = \sigma(t)^{-1}ad_{\beta(\sigma)} \circ ad_g(\eta[d])$$
$$= \sigma(t^{-1})ad_{\beta(\sigma)}(t\eta) = t\sigma(t)^{-1}ad_{\beta(\sigma)}(\eta)$$

toujours parce que t est central. Mais $\beta(\sigma) \in S_{\bar{H}}(\mathbb{A}_{\bar{F}})$, a fortiori $\beta(\sigma) \in \bar{G}_{SC}(\mathbb{A}_{\bar{F}})$ donc $ad_{\beta(\sigma)}$ fixe η. On obtient finalement

$$ad_{X(\sigma)u_{\mathcal{E}^*}(\sigma)} \circ \sigma(\eta) = t\sigma(t)^{-1}\eta.$$

Puisque t est central, on a l'égalité $G_{t\sigma(t)^{-1}\eta} = G_\eta = \bar{G}$. L'égalité précédente implique que l'automorphisme $ad_{X(\sigma)} \circ \sigma_{G^*}$ de $G(\bar{F})$ conserve $\bar{G}(\bar{F})$. Notons $\psi(\sigma)$ sa restriction à $\bar{G}$. On a introduit l'action quasi-déployée $\sigma \mapsto \sigma_{\bar{G}}$ sur $\bar{G}$ relative à la paire de Borel épinglée fixée en 5.2. Rappelons que l'on a

$$ad_{X(\sigma)} \circ \sigma_{G^*} = ad_{A(\sigma)}ad_{x\sigma_{G^*}(x)^{-1}} \circ \sigma_{G^*}.$$

Par définition de x, $x\sigma_{G^*}(x)^{-1}$ normalise T^* et son image dans le groupe W est $\omega_S(\sigma)$. De plus, $A(\sigma) \in T^*_{sc}(\bar{F})$. On en déduit que $\psi(\sigma)$ conserve $\bar{T} = T^{\theta^*,0}$ et que sa restriction à $\bar{T}$ coincide avec $\omega_{S,\bar{G}}(\sigma)\sigma_{\bar{G}}$, où $\omega_{S,\bar{G}}(\sigma) = \omega_S(\sigma)\omega_{\bar{G}}(\sigma)^{-1}$. On a $\omega_{S,\bar{G}}(\sigma) \in W^{\bar{G}}$ et le corollaire 2.2 de [K1] permet de fixer un élément $\bar{x} \in \bar{G}_{SC}(\bar{F})$ tel que $\bar{x}\sigma_{\bar{G}}(\bar{x})^{-1}$ normalise $\bar{T}$ et que son image dans $W^{\bar{G}}$ soit $\omega_{S,\bar{G}}(\sigma)$. Alors les automorphismes $\psi(\sigma)$ et $ad_{\bar{x}\sigma_{\bar{G}}(\bar{x})^{-1}} \circ \sigma_{\bar{G}}$ de $\bar{G}(\bar{F})$ coïncident sur $\bar{T}$. Il existe donc $\bar{t}_{sc}(\sigma) \in \bar{T}_{sc}(\bar{F})$ tel que

$$ad_{\bar{t}_{sc}(\sigma)} \circ \psi(\sigma) = ad_{\bar{x}\sigma_{\bar{G}}(\bar{x})^{-1}} \circ \sigma_{\bar{G}}.$$

L'élément $\beta(\sigma)$ est un relèvement dans $\bar{T}_{sc}(\mathbb{A}_{\bar{F}})$ de notre cocycle initial à valeurs dans $\bar{T}_{sc}(\mathbb{A}_{\bar{F}})/\bar{T}_{sc}(\bar{F})$. On peut le multiplier par l'élément $\bar{t}_{sc}(\sigma) \in \bar{T}_{sc}(\bar{F})$. On voit que cela ne perturbe aucune des relations ci-dessus mais cela remplace $\psi(\sigma)$ par $ad_{\bar{t}_{sc}(\sigma)} \circ \psi(\sigma)$. Après ce remplacement, on obtient simplement

$$(11) \qquad \psi(\sigma) = ad_{\bar{x}\sigma_{\bar{G}}(\bar{x})^{-1}} \circ \sigma_{\bar{G}}.$$

En utilisant les définitions, on en déduit

$$(12) \qquad \sigma_{\bar{G}} = ad_{\sigma_{\bar{G}}(\bar{x})\bar{x}^{-1}} \circ \psi(\sigma) = ad_{\sigma_{\bar{G}}(\bar{x})\bar{x}^{-1}} \circ ad_{X(\sigma)} \circ \sigma_{G^*}$$

$$= ad_{\sigma_{\bar{G}}(\bar{x})\bar{x}^{-1}} \circ ad_{X(\sigma)u_{\mathcal{E}^*}(\sigma)} \circ \sigma = ad_{\sigma_{\bar{G}}(\bar{x})\bar{x}^{-1}} \circ ad_{\beta(\sigma)g\sigma(g)^{-1}} \circ \sigma.$$

Il résulte de (11) que ψ est un homomorphisme de Γ_F dans le groupe des automorphismes de $\bar{G}$ (il s'agit ici d'automorphismes de groupes abstraits). En revenant à la définition de ψ, on obtient que, pour $\sigma_1, \sigma_2 \in \Gamma_F$, les automorphismes

$$ad_{X(\sigma)_1} \circ \sigma_{1,G^*} \circ ad_{X(\sigma_2)} \circ \sigma_{2,G^*}$$

et

$$ad_{X(\sigma_1\sigma_2)} \circ (\sigma_1\sigma_2)_{G^*}$$

coïncident sur $\bar{G}$. Cela équivaut à dire que $X(\sigma_1)\sigma_{1,G^*}(X(\sigma_2))X(\sigma_1\sigma_2)^{-1}$ commute à $\bar{G}$. En utilisant la définition de la cochaîne X et en se rappelant que $ad_{x\sigma_{G^*}(x)^{-1}} \circ \sigma_{G^*} = \sigma_S$ sur T^*, on calcule

$$X(\sigma_1)\sigma_{1,G^*}(X(\sigma_2))X(\sigma_1\sigma_2)^{-1} = A(\sigma_1)\sigma_{1,S}(A(\sigma_2))A(\sigma_1\sigma_2)^{-1} = \partial_S(A)(\sigma_1, \sigma_2).$$

On a noté ∂_S la différentielle calculée pour l'action $\sigma \mapsto \sigma_S$. Donc $\partial_S(A)$ prend ses valeurs dans le commutant de $\bar{G}$. Par définition, on a

$$\partial_S(A) = \partial_S(\beta)\partial_S(V_S^{-1}).$$

On calcule aisément $\partial_S(V_S^{-1}) = \partial(u_{\mathcal{E}^*})^{-1}$, où ∂ est la différentielle calculée pour l'action naturelle. On sait que $\partial(u_{\mathcal{E}^*})$ est à valeurs dans $Z(G_{SC})$, a fortiori dans le commutant de $\bar{G}$. Donc $\partial_S(\beta)$ prend aussi ses valeurs dans ce commutant. Puisque β devient un cocycle quand on le pousse dans $\bar{T}_{sc}(\mathbb{A}_{\bar{F}})/\bar{T}_{sc}(\bar{F})$, $\partial_S(\beta)$ est à valeurs dans $\bar{T}_{sc}(\bar{F})$. L'intersection de ce groupe avec le commutant de $\bar{G}$ est $Z(\bar{G}_{SC};\bar{F})$. Donc $\partial_S(\beta)$ est à valeurs dans ce dernier groupe.

Définissons une cochaîne $\bar{X} : \Gamma_F \to \bar{G}_{SC}(\mathbb{A}_{\bar{F}})$ par $\bar{X}(\sigma) = \beta(\sigma)^{-1}\bar{x}\sigma_{\bar{G}}(\bar{x})^{-1}$. Un calcul simple montre que $\partial_{\bar{G}}(\bar{X}) = \partial_S(\beta)^{-1}$, où $\partial_{\bar{G}}$ est la différentielle pour l'action $\sigma \mapsto \sigma_{\bar{G}}$. Donc $\bar{X}$ se pousse en un cocycle de Γ_F dans $\bar{G}_{SC}(\mathbb{A}_{\bar{F}})/Z(\bar{G}_{SC};\bar{F})$. Parce que $\bar{G}_{SC}$ est simplement connexe, le théorème 2.2 de [K2] dit que l'application naturelle

$$H^1(\Gamma_F; \bar{G}_{SC}(\bar{F})/Z(G_{SC};\bar{F})) \to H^1(\Gamma_F; \bar{G}_{SC}(\mathbb{A}_{\bar{F}})/Z(\bar{G}_{SC};\bar{F}))$$

est surjective. Ainsi, on peut fixer $\bar{a} \in \bar{G}_{SC}(\mathbb{A}_{\bar{F}})$ tel que

$$\bar{a}^{-1}\bar{X}(\sigma)\sigma_{\bar{G}}(\bar{a}) \in \bar{G}_{SC}(\bar{F})$$

pour tout $\sigma \in \Gamma_F$. En utilisant la définition de $\bar{X}(\sigma)$ et la relation (12), cela équivaut à

$$\bar{a}^{-1}\beta(\sigma)^{-1}\bar{x}\sigma_{\bar{G}}(\bar{x})^{-1}ad_{\sigma_{\bar{G}}(\bar{x})\bar{x}^{-1}\beta(\sigma)g\sigma(g)^{-1}}(\sigma(\bar{a})) \in \bar{G}_{SC}(\bar{F}),$$

ou encore

$$\bar{a}^{-1}g\sigma(\bar{a}^{-1}g)^{-1}\sigma(g)g^{-1}\beta(\sigma)^{-1}\bar{x}\sigma_{\bar{G}}(\bar{x})^{-1} \in \bar{G}_{SC}(\bar{F}).$$

Puisque $\bar{x} \in \bar{G}_{SC}(\bar{F})$ et que $\beta(\sigma)g\sigma(g)^{-1} = X(\sigma)u_{\mathcal{E}^*}(\sigma)$, cela équivaut aussi à

$$(13) \qquad \bar{a}^{-1}g\sigma(\bar{a}^{-1}g)^{-1} \in \bar{G}_{SC}(\bar{F})X(\sigma)u_{\mathcal{E}^*}(\sigma).$$

A fortiori $\bar{a}^{-1}g\sigma(\bar{a}^{-1}g)^{-1} \in G_{SC}(\bar{F})$. L'application $\sigma \mapsto \bar{a}^{-1}g\sigma(g^{-1}\bar{a})$ est un cocycle à valeurs dans $G_{SC}(\bar{F})$ qui est évidemment trivial quand on le pousse dans $G_{SC}(\mathbb{A}_{\bar{F}})$.

D'après le théorème [Lab2] 1.6.9, il est trivial. On peut donc fixer $\dot{g}_{sc} \in G_{SC}(\bar{F})$ et $h \in G_{SC}(\mathbb{A}_F)$ tel que $g = \bar{a}\dot{g}_{sc}h$. Posons $\dot{g} = z'\dot{g}_{sc}$ et $\dot{d} = (\dot{g}^{-1}\eta\dot{g}, \dot{g})$. Montrons que

(14) $\dot{d} \in D_F[d_V]$.

Puisque $\dot{g} = z'\bar{a}^{-1}gh^{-1}$ et que $\bar{a} \in \bar{G}$, on a

$$\dot{g}^{-1}\eta\dot{g} = ad_{hg^{-1}}((\theta-1)(z')\eta) = ad_{hg^{-1}}(t\eta) = ad_h(\eta[d]).$$

Donc $\dot{g}^{-1}\eta\dot{g} \in \tilde{G}(\mathbb{A}_F)$. Puisque c'est aussi un élément de $\tilde{G}(\bar{F})$, c'est un élément de $\tilde{G}(F)$. Notons $\dot{\psi}$ la restriction de $ad_{\dot{g}}$ à $G_{\dot{g}^{-1}\eta\dot{g}}$, qui est un isomorphisme de ce groupe sur $\bar{G}$. Pour $\sigma \in \Gamma_F$, calculons

$$\sigma(\dot{\psi}) \circ \dot{\psi}^{-1} = \sigma_{\bar{G}} \circ \dot{\psi} \circ \sigma^{-1} \circ \dot{\psi}^{-1}.$$

En utilisant (12), c'est la restriction à $G_{\dot{g}^{-1}\eta\dot{g}}$ de

$$ad_{\sigma_{\bar{G}}(\bar{x})\bar{x}^{-1}} \circ ad_{X(\sigma)u_{\mathcal{E}^*}(\sigma)} \circ \sigma \circ ad_{\dot{g}} \circ \sigma^{-1} \circ ad_{\dot{g}^{-1}} = ad_{\sigma_{\bar{G}}(\bar{x})\bar{x}^{-1}} \circ ad_{X(\sigma)u_{\mathcal{E}^*}(\sigma)} \circ ad_{\sigma(\dot{g})\dot{g}^{-1}}.$$

D'après les définitions, on a

$$ad_{\sigma(\dot{g})\dot{g}^{-1}} = ad_{\sigma(\dot{g}_{sc})\dot{g}_{sc}^{-1}} = ad_{\sigma(\bar{a}^{-1}g)g^{-1}\bar{a}}.$$

Posons $\bar{u}(\sigma) = X(\sigma)u_{\mathcal{E}^*}(\sigma)\sigma(\bar{a}^{-1}g)g^{-1}\bar{a}$. On obtient que $\sigma(\dot{\psi}) \circ \dot{\psi}^{-1}$ est la restriction à $\bar{G}$ de $ad_{\sigma_{\bar{G}}(\bar{x})\bar{x}^{-1}\bar{u}(\sigma)}$. Mais $\bar{x} \in \bar{G}_{SC}(\bar{F})$ et (13) montre que l'on a aussi $\bar{u}(\sigma) \in \bar{G}_{SC}(\bar{F})$. Donc $\dot{\psi}$ est un torseur intérieur de $G_{\dot{g}^{-1}\eta\dot{g}}$ sur $\bar{G}$. Cela prouve que $\dot{d} \in D_F$. On peut étendre le corps E de sorte que tous les éléments intervenant appartiennent à $G(\mathbb{A}_E)$. Soit v une place de F, notons w la restriction de $\bar{v}$ à E. On se rappelle que $g_w \in T^*(\bar{F}_{\bar{v}})r[d_v]G_{\eta[d_v]}(\bar{F}_{\bar{v}})$. Ecrivons conformément $g_w = t_w r[d_v]u_w$. Les égalités $ad_{g_w}(\eta[d_v]) = t\eta = (\theta^*-1)(z')\eta$ et $ad_{r[d_v]}(\eta[d_v]) = \eta$ impliquent que $t_w \in (z')^{-1}T^{\theta^*} \subset (z')^{-1}I_\eta$. Il résulte des définitions que

$$\dot{g} = \bar{a}_w^{-1}z'g_wh_v^{-1} = \bar{a}_w^{-1}z't_wr[d_v]u_wh_v^{-1} = \mathbf{u}_wr[d_v]h_v^{-1},$$

où $\mathbf{u}_w = \bar{a}_w^{-1}z't_wad_{r[d_v]}(u_w)$. L'élément $\mathbf{u}_w$ est un produit d'éléments de $I_\eta(\bar{F}_{\bar{v}})$. L'élément h_v appartient à $G(F_v)$. Donc $\dot{g} \in I_\eta(\bar{F}_{\bar{v}})r[d_v]G(F_v)$. Les propriétés de d_v se propagent donc à $\dot{d}$, c'est-à-dire que la projection de $\dot{d}$ dans $D_{\mathbb{A}_F^V}$ appartient à $D_{\mathbb{A}_F^V}^{nr}$ et sa projection dans D_V appartient à $I_\eta d_V G(F_V)$. Cela prouve (14).

Evidemment, (14) démontre (8), ce qui achève la preuve de la proposition. $\square$

Remarque. On peut prouver la réciproque, à savoir que, si $D_F[d_V] \neq \emptyset$, alors (V_S, t) appartient à Q_0. Dans ce cas, l'application $j \mapsto \delta_j[d_V]$ est constante sur $\mathcal{J}(\mathbf{H})$. Nous n'utiliserons pas ce résultat, en le remplaçant par la proposition du paragraphe suivant.

6.10 Comparaison de deux facteurs de transfert

Soit $d \in D_F$. On suppose

(1) la projection de d dans $D_{\mathbb{A}_F^V}$ appartient à $D_{\mathbb{A}_F^V}^{nr}$.

Notons d_V la projection de d dans D_V. On suppose

(2) $d_V \in D_V^{rel}$.

L'élément $\eta[d]$ appartient à $\tilde{G}(F)$, donc le groupe $G_{\eta[d]}$ est défini sur F. Le torseur $\psi_{r[d]}$ est défini sur $\bar{F}$. La construction de [VI] 3.6 s'applique à la donnée endoscopique $\bar{H}$

de $G_{\eta[d],SC}$ et fournit un facteur $\Delta[d_V]$ canonique, pourvu que l'on ait choisi en toute place $v \notin V$ un sous-groupe compact hyperspécial de $G_{\eta[d],SC}(F_v)$. Pour cela, comme en 5.7, on fixe en toute place $v \notin V$ un élément $h_v \in G(F_v)$ tel que $ad_{h_v^{-1}}(\eta[d]) \in \tilde{K}_v$. C'est loisible d'après (1). On peut supposer que $h_v = 1$ pour presque tout v. On choisit le sous-groupe image réciproque dans $G_{\eta[d],SC}(F_v)$ de $ad_{h_v}(K_v) \cap G_{\eta[d]}(F_v)$. On pose $h = (h_v)_{v \notin V}$ et on note plus précisément $\Delta[d_V, h]$ le facteur de transfert canonique attaché à ce choix de compacts. Utilisons ce facteur dans la définition des constantes de 5.7. On note $\delta_j[d_V, h]$ le produit de ces constantes sur les places $v \in V$.

Proposition. *Pour tout $j \in \mathcal{J}(\mathbf{H})$, on a l'égalité $\delta_j[d_V, h] = \omega(h)$.*

Preuve. On reprend les constructions de la preuve précédente, en utilisant les notations des paragraphes 6.7 et 6.8. Pour toute place v, on note $\bar{S}[d_v]_{sc}$ l'image réciproque de $S[d_v]^{\theta,0}$ dans $G_{\eta[d],SC}$. Pour $v \in V$, on pose $\bar{y}_v = exp(\bar{Y}_{sc,v})$ et $x_{sc}[d_v] = exp(X_{sc}[d_v])$ (cf. 5.7 pour ces notations ; d_v est l'image de d dans D_v). Pour $v \notin V$, on a fixé dans la preuve précédente un élément $x[d_v] \in S[d_v]^{\theta,0}(F_v)$ vérifiant diverses conditions. On vérifie facilement qu'on peut lui imposer de plus que son image dans $G_{\eta[d],AD}$ est l'image d'un élément $x_{sc}[d_v] \in \bar{S}[d_v]_{sc}(F_v)$. On fixe un tel élément et on note $\bar{y}_v \in S_{\bar{H}}(F_v)$ l'élément qui lui correspond par l'isomorphisme entre $\bar{S}[d_v]_{sc}$ et $S_{\bar{H}}$ déterminé par les paires de Borel $(B_{\bar{H}}, S_{\bar{H}})$ de $\bar{H}$ et $(\bar{B}[d_v]_{sc}, \bar{S}[d_v]_{sc})$ de $G_{\eta[d],SC}$, où $\bar{B}[d_v]_{sc}$ est l'image réciproque dans ce groupe de $B[d_v] \cap G_{\eta[d]}$. Le terme $\delta_j[d_V, h]$ est la limite quand le terme $Y_{j,1,V}$ tend vers 0 de

$$\Delta_{j,1,V}(y_{j,1}\epsilon_{j,1}, x[d_V]\eta)\Delta[d_V, h](\bar{y}_V, x_{sc}[d_V])^{-1}.$$

Comme dans le paragraphe précédent, on note simplement lim cette notion de limite. Ce rapport est le produit des rapports des facteurs globaux et du produit sur les places $v \notin V$ des rapports de facteurs normalisés

$$\Delta_{j,1,v}(y_{j,1}\epsilon_{j,1}, x[d_V]\eta)^{-1}\Delta[d_v, h](\bar{y}_V, x_{sc}[d_V]).$$

Montrons que

(3) quitte à remplacer en un nombre fini de places hors de V les termes $x[d_v]$, $x_{sc}[d_v]$ et $y_{j,1,v}$ par des éléments assez proches des éléments neutres, le terme ci-dessus vaut $\omega(h_v)$ pour tout $v \notin V$.

On peut fixer un ensemble fini V'' de places contenant V de sorte que le rapport vaille 1 et $\omega(h_v) = 1$ pour tout $v \notin V''$. Pour $v \in V'' - V$, on remplace nos termes par des termes assez proches de 1. Les assertions (i) et (iii) du théorème 5.8 disent qu'alors le rapport vaut $\omega(h_v)$. D'où (3).

On est ramené à calculer le rapport des facteurs globaux. Il se décompose encore en produit du rapport des facteurs Δ_{II} et de celui des facteurs Δ_{imp}. Montrons que

(4) quitte à remplacer en un nombre fini de places hors de V les termes $x[d_v]$, $x_{sc}[d_v]$ et $y_{j,1,v}$ par des éléments assez proches des éléments neutres, on a

$$lim \prod_{v \in Val(F)} \Delta_{II,v}(y_j\epsilon_j, x[d_v]\eta)\Delta_{II}[d_v, h](\bar{y}_v, x_{sc}[d_v])^{-1} = 1.$$

Pour toute place v, les relations (1) et (2) de [W1] 10.3 nous disent que le rapport intervenant ci-dessus a une limite quand les données $x[d_v]$ etc... tendent vers les éléments neutres et elles calculent cette limite. Notons-la ℓ_v. En se reportant aux définitions de

[W1] 9.3 et 10.3, on voit que, pour toute élément $\alpha_{res} \in \Sigma(S)_{res,ind}$, il existe un élément $c_{\alpha_{res}} \in F_{\alpha_{res}}^{\times}$ de sorte que

- pour $\sigma \in \Gamma_F$, $c_{\sigma(\alpha_{res})} = \sigma(c_{\alpha_{res}})$;

- pour tout v, $\ell_v = \prod_{\alpha_{res}\in\Sigma(S)_{res,ind}/\Gamma_{F_v}} \chi_{\alpha_{res},w}(c_{\alpha_{res}})$, où w est ici la restriction de $\bar{v}$ à $F_{\alpha_{res}}$ et $\Sigma(S)_{res,ind}/\Gamma_{F_v}$ est le quotient de $\Sigma(S)_{res,ind}$ par l'action de Γ_{F_v}.

Les propriétés des χ-data (qui sont bien sûr définies sur F) et des $c_{\alpha_{res}}$ permettent de récrire

$$\ell_v = \prod_{\alpha_{res}\in\Sigma(S)_{res,ind}/\Gamma_F} \prod_{w|v} \chi_{\alpha_{res},w}(c_{\alpha_{res}}),$$

où le produit en w est sur les places de $F_{\alpha_{res}}$ au-dessus de v.

On peut fixer un ensemble fini V'' de places contenant V de sorte que, pour $v \notin V''$,

- $\Delta_{II,v}(y_j\epsilon_j, x[d_v]\eta)\Delta_{II}[d_v,h](\bar{y}_v, x_{sc}[d_v])^{-1} = 1$;

- $\ell_v = 1$.

Pour $v \in V'' - V$, on remplace les données $x[d_v]$ etc... par des éléments assez proches des éléments neutres pour que le rapport des facteurs $\Delta_{II,v}$ vaille ℓ_v. Alors la limite de l'assertion (4) est $\prod_{v\in Val(F)} \ell_v$. Mais ce produit vaut

$$\prod_{\Sigma(S)_{res,ind}/\Gamma_F} \prod_{w\in Val(F_{\alpha_{res}})} \chi_{\alpha_{res},w}(c_{\alpha_{res}}).$$

Cela vaut 1 par la formule du produit. D'où (4).

Il reste à calculer la limite du rapport des facteurs globaux

$$\Delta_{j,imp}(y_{j,1}\epsilon_{j,1}, x[d]\eta)\Delta_{imp}[d](\bar{y}, x_{sc}[d])^{-1}.$$

On a montré dans la preuve de la proposition 6.9 que le premier terme avait une limite, égale à $<(V_S,t), \mathbf{p}(j)>^{-1}$ avec les notations de ce paragraphe. La même preuve montre que le second terme a aussi une limite, égale à $<V_{\bar{S}}, \bar{s}>^{-1}$, où $V_{\bar{S}} : \Gamma_F \to S_{\bar{H}}(\mathbb{A}_{\bar{F}})/S_{\bar{H}}(\bar{F})$ est un cocycle analogue à V_S. Il reste à prouver l'égalité

$$(5) \qquad <(V_S,t), j> = <V_{\bar{S}}, \bar{s}> .$$

Reprenons la construction de (V_S,t) du paragraphe précédent. Ici, l'élément d appartient à D_F et on peut appliquer le lemme 6.8. On peut donc écrire $g = t_1 r[d]_{sc} u$, avec $t_1 \in T^*_{sc}(\mathbb{A}_E)$ et $u \in G_{\eta[d],SC}(\mathbb{A}_E)$. Cela entraîne $g = z[d]^{-1}t_1 r[d]u$. L'élément $t \in ((1-\theta^*)(T^*))(\mathbb{A}_E)$ a été défini par $ad_g(\eta[d]) = t\eta$. La relation précédente entraîne $t = (1-\theta^*)(t_1 z[d]^{-1})$. Pour $\sigma \in \Gamma_F$, on a

$$V_S(\sigma) = x\sigma_{G^*}(x)^{-1}u_{\mathcal{E}^*}(\sigma)\sigma(g)g^{-1}$$

$$= \sigma_S(t_1)x\sigma_{G^*}(x)^{-1}u_{\mathcal{E}^*}(\sigma)\sigma(r[d]_{sc})r[d]_{sc}^{-1}ad_{r[d]_{sc}}(\sigma(u)u^{-1})t_1^{-1} = \sigma_S(t_1)t_1^{-1}V'_S(\sigma),$$

où

$$V'_S(\sigma) = x\sigma_{G^*}(x)^{-1}u_{\mathcal{E}^*}(\sigma)\sigma(r[d]_{sc})r[d]_{sc}^{-1}ad_{r[d]}(\sigma(u)u^{-1}).$$

Le couple formé du cocycle $\sigma \mapsto \sigma_S(t_1)t_1^{-1}$ et de l'élément $(1-\theta^*)(t_1)$ est un cobord. On peut le supprimer. Le terme $(1-\theta^*)(z[d])^{-1}$ appartient à $(1-\theta^*)(S)(E)$ et disparaît dans notre groupe de cohomologie Q. On obtient que (V_S,t) (ou plus exactement son image dans Q est l'image par l'homomorphisme naturel

$$H^{1,0}(\mathbb{A}_{\bar{F}}/\bar{F}; S_{sc}) \to Q = H^{1,0}(\mathbb{A}_{\bar{F}}/\bar{F}; S_{sc} \stackrel{1-\theta}{\to} (1-\theta)(S))$$

du cocycle V'_S.

Pour calculer $V_{\bar{S}}$, on utilise les objets définis en 6.8. Posons $S[d]=\prod_{v\in Val(F)}S[d_v]$ et $\bar{S}[d]=\prod_{v\in Val(F)}(S[d_v]\cap G_{\eta[d]})$. Notons aussi $\bar{S}^*[d]$ le tore $\bar{T}[d]$ muni de l'action $\sigma\mapsto\sigma_S$ transportée par $ad_{r[d]^{-1}}$. Notons $\bar{S}[d]_{sc}$ et $\bar{S}^*[d]_{sc}$ les images réciproques de $\bar{S}[d]$ et $\bar{S}^*[d]$ dans $G_{\eta[d],SC}$. Puisque ad_g se restreint en un isomorphisme défini sur F de $S[d]$ sur S, ad_u se restreint en un isomorphisme défini sur F de $\bar{S}[d]$ sur $\bar{S}^*[d]$. La définition de [VI] 3.6 fournit un cocycle $V'_{\bar{S}}$ à valeurs dans $\bar{S}^*[d]_{sc}(\mathbb{A}_E)/\bar{S}^*[d]_{sc}(E)$ défini par

$$V'_{\bar{S}}(\sigma)=\bar{x}[d]\sigma_{G_{\eta[d]^*}}(\bar{x}[d])^{-1}\bar{u}[d](\sigma)\sigma(u)u^{-1}.$$

Le cocycle $V_{\bar{S}}$ est l'image de $V'_{\bar{S}}$ par l'isomorphisme $ad_{r[d]}:\bar{S}^*[d]_{sc}\to\bar{S}_{sc}=S_{\bar{H}}$. On voit sur les formules ci-dessus que $V'_S(\sigma)$ est le produit de l'image naturelle de $V_{\bar{S}}(\sigma)$ et de termes appartenant à $S_{sc}(E)$. Il en résulte que (V_S,t) est l'image de $V_{\bar{S}}$ par l'homomorphisme

$$\mathbf{q}_1:H^1(\mathbb{A}_{\bar{F}}/\bar{F};S_{\bar{H}})\to Q=H^{1,0}(\mathbb{A}_{\bar{F}}/\bar{F};S_{sc}\stackrel{1-\theta}{\to}(1-\theta)(S)).$$

Puisque l'application

$$\mathbf{p}_1:P=H^{1,0}(W_F;\hat{S}/\hat{S}^{\hat{\theta},0}\stackrel{1-\hat{\theta}}{\to}\hat{S}_{ad})\to\hat{S}_{\hat{H}}^{\Gamma_F}$$

est duale de $\mathbf{q}_1$, cela entraîne que

$$<(V_S,t),\mathbf{p}(j)>=<V_{\bar{S}},\mathbf{p}_1\circ\mathbf{p}(j)>.$$

Mais $\mathbf{p}_1\circ\mathbf{p}(j)=\bar{s}$ d'après la proposition 6.4. Cela prouve (5) et la proposition. $\square$

7 Le cas où $D_F[d_V]$ est non vide

7.1 Une proposition de nullité

Dans cette section, on fixe un élément $d_V\in D_V^{rel}$. On a

(1) l'ensemble de classes $I_\eta(\bar{F})\backslash D_F[d_V]/G(F)$ est fini.

Preuve. Quand d parcourt $D_F[d_V]$, les $\eta[d]$ sont des éléments de $\tilde{G}(F)$ qui appartiennent à la même classe de conjugaison stable. Pour $v\notin V$, leurs classes de conjugaison par $G(F_v)$ coupent $\tilde{K}_v$. D'après le lemme [VI] 2.1, ils sont contenus dans un nombre fini de classes de conjugaison par $G(F)$. Fixons un sous-ensemble fini $X_0\subset D_F[d_V]$ tel que, pour tout $d\in D_F[d_V]$, il existe $d_0\in X_0$ tel que $\eta[d]$ et $\eta[d_0]$ soient conjugués par un élément de $G(F)$. L'ensemble $I_\eta(\bar{F})\backslash Z_G(\eta;\bar{F})$ est fini. Fixons-en un ensemble de représentants Z_0. Pour $d\in D_F[d_V]$ et $z\in Z_0$, l'élément zd peut appartenir ou non à $D_F[d_V]$. Notons X_1 l'ensemble des zd_0 qui appartiennent à $D_F[d_V]$, pour $d_0\in X_0$ et $z\in Z_0$. Soit $d\in D_F[d_V]$. On peut choisir $d_0\in X_0$ et $x\in G(F)$ tels que $\eta[d]=x\eta[d_0]x^{-1}$. Alors les deux éléments $r[d_0]$ et $r[d]x$ conjuguent $\eta[d_0]$ en η. Ils diffèrent donc par multiplication à gauche par un élément de $Z_G(\eta;\bar{F})$, que l'on peut écrire $u^{-1}z$, avec $z\in Z_0$ et $u\in I_\eta(\bar{F})$. On a alors $zd_0=udx$. L'élément de droite appartient à $D_F[d_V]$ donc aussi celui de gauche. Ce dernier appartient donc à X_1. L'égalité précédente montre que cet élément a même image que d dans notre ensemble de doubles classes. Cela montre que tout élément de cet ensemble de doubles classes est l'image d'un élément de X_1, lequel est fini. $\square$

Fixons un ensemble de représentants $\dot{D}_F[d_V]$ de l'ensemble de doubles classes $I_\eta(\bar{F})\backslash D_F[d_V]/G(F)$. Considérons un ensemble fini V' de places de F contenant V et tel que

(2) pour tout $d \in \dot{D}_F[d_V]$ et tout $v \notin V'$, on a $\eta[d] \in \tilde{K}_v$.

Soit $d \in \dot{D}_F[d_V]$. On fixe un ensemble de représentants $\mathcal{U}[V',d]$ de l'ensemble de classes

$$G_{\eta[d]}(F_{V'}^V)/Z(G_{\eta[d]};F_{V'}^V)G_{\eta[d],SC}(F_{V'}^V).$$

On suppose que $1 \in \mathcal{U}[V',d]$. Pour $v \in V'-V$, on fixe $h_v[d] \in G(F_v)$ tel que $ad_{h_v[d]^{-1}}(\eta[d]) \in \tilde{K}_v$. On pose $h[d]=(h_v[d])_{v\in V'-V}$. Pour $u=(u_v)_{v\in V'-V} \in \mathcal{U}[V',d]$, munissons $G_{\eta[d],SC}(\mathbb{A}_F^V)$ du sous-groupe compact $K_{sc}^V[d,u]$ défini ainsi : pour tout $v \notin V$, $K_{sc,v}[d,u]$ est l'image réciproque dans $G_{\eta[d],SC}(F_v)$ de $K_v \cap G_{\eta[d]}(F_v)$ si $v \notin V'$ et de $ad_{u_v h_v[d]}(K_v) \cap G_{\eta[d]}(F_v)$ si $v \in V'-V$. Ce groupe permet de définir un facteur de transfert canonique sur

$$\bar{H}(F_V) \times G_{\eta[d],SC}(F_V)$$

que nous notons $\Delta_V[d,u]$.

En 5.9, on a défini une fonction $\bar{f}[d_V] \in SI(\bar{H}(F_V))$. Pour $d \in \dot{D}_F[d_V]$, la "composante en V" de d n'est pas forcément d_V, cette composante appartient seulement à $I_\eta(\bar{F}_V)d_VG(F_V)$. On peut néanmoins appliquer la définition de 5.9 en remplaçant d_V par cette composante en V. Dans cette définition, il intervient un facteur de transfert. On peut prendre $\Delta_V[d,u]$ pour un élément $u \in \mathcal{U}[V',d]$. On note alors $\bar{f}[d,u]$ la fonction obtenue. Posons

$$(3) \qquad \bar{\varphi}[V',d_V] = \sum_{d\in\dot{D}_F[d_V]} |\mathcal{U}[V',d]|^{-1} \sum_{u\in\mathcal{U}[V',d]} \omega(uh[d])\bar{f}[d,u].$$

Cette expression dépend de plusieurs données auxiliaires, en particulier de l'ensemble de places V' puisque les ensembles $\mathcal{U}[V',d]$ en dépendent. Les paragraphes 7.3 à 7.9 sont consacrés à prouver la proposition suivante.

Proposition. *Supposons $\mathcal{J}(\mathbf{H})=\emptyset$. Alors, si V' est assez grand, on a $\bar{\varphi}[V',d_V]=0$.*

7.2 Premier calcul d'une expression intervenant en 5.9

Considérons l'expression

(1) $\bar{f}[d_V]\sum_{j\in\mathcal{J}(\mathbf{H})}\delta_j[d_V]$

qui apparaît dans l'expression 5.9(2).

Corollaire. *L'expression (1) est nulle si $D_F[d_V]=\emptyset$. Supposons $D_F[d_V]$ non vide. Alors cette expression (1) est égale à $|P^0||\dot{D}_F[d_V]|^{-1}\bar{\varphi}[V',d_V]$ pourvu que V' soit assez grand.*

Preuve. La première assertion résulte de la proposition 6.9. Supposons $D_F[d_V]$ non vide. Si $\mathcal{J}(\mathbf{H})$ est vide, l'expression (1) est nulle et $\bar{\varphi}[V',d_V]$ aussi d'après la proposition 7.1. Supposons $\mathcal{J}(\mathbf{H})$ non vide. L'expression (1) ne dépend que de la double classe $I_\eta(\bar{F}_V)d_VG(F_V)$. On peut remplacer ce terme d_V par la composante en V d'un élément $d \in \dot{D}_F[d_V]$. On peut utiliser dans les définitions le facteur de transfert $\Delta_V[d,u]$ pour un

élément $u \in \mathcal{U}[V', d]$. La fonction $\bar{f}[d_V]$ est alors remplacée par $\bar{f}[d, u]$. La proposition 6.10 calcule les facteurs $\delta_j[d_V]$ pour nos choix : ils sont égaux à $\omega(uh[d])$, où u et $h[d]$ sont complétés en des éléments de $G(\mathbb{A}_F)$ de composantes 1 hors de $V' - V$. L'expression (1) devient
$$|\mathcal{J}(\mathbf{H})|\omega(uh[d])\bar{f}[d, u].$$
On peut moyenner en d et u et on obtient l'expression
$$|\mathcal{J}(\mathbf{H})||\dot{D}_F[d_V]|^{-1}\bar{\varphi}[V', d_V].$$
D'après 6.4 et 6.6, on a $|\mathcal{J}(\mathbf{H})| = |P^0|$ puisque $\mathcal{J}(\mathbf{H}) \neq \emptyset$. D'où la deuxième assertion du corollaire. $\square$.

7.3 Mise en place de la situation

La conclusion de la proposition 7.1 est triviale si $D_F[d_V]$ est vide. **On suppose jusqu'en 7.15 que** $D_F[d_V] \neq \emptyset$. On fixe un élément de cet ensemble, que l'on note $d_\star = (\eta_\star, r_\star)$. Pour simplifier les notations, on pose simplement
$$I_\star = I_{\eta_\star},\ \bar{G}_\star = G_{\eta_\star}.$$
Ces groupes sont définis sur F et $ad_{r_\star}$ se restreint en un torseur intérieur de $\bar{G}_\star$ sur $\bar{G}$. Fixons un sous-tore maximal $\bar{T}_\star$ de $\bar{G}_\star$ défini sur F. Notons $T_\star$ son commutant dans G. On peut fixer $\bar{r}_\star \in \bar{G}_\star(\bar{F})$ tel que $ad_{\bar{r}_\star}(\bar{T}_\star) = ad_{r_\star^{-1}}(T^*) \cap \bar{G}_\star$. On a $ad_{r_\star\bar{r}_\star}(\bar{T}_\star) = \bar{T}$ $(= \bar{G} \cap T^*)$ et $ad_{r_\star\bar{r}_\star}(T_\star) = T^*$. Il existe un cocycle $\omega_{T_\star} : \Gamma_F \to W^{\bar{G}}$ tel que $ad_{r_\star\bar{r}_\star}$ entrelace l'action galoisienne naturelle sur $\bar{T}_\star$ avec l'action $\sigma \mapsto \omega_{T_\star}(\sigma) \circ \sigma_{\bar{G}}$ sur $\bar{T}$. Puisque $\sigma_{\bar{G}} = \omega_{\bar{G}}(\sigma) \circ \sigma_{G^*}$, $ad_{r_\star\bar{r}_\star}$ entrelace l'action naturelle sur $T_\star$ avec l'action $\sigma \mapsto \omega_{T_\star}(\sigma)\omega_{\bar{G}}(\sigma) \circ \sigma_{G^*}$ sur T^*. On a défini le tore S comme étant T^* muni de l'action galoisienne $\sigma \mapsto \omega_S(\sigma) \circ \sigma_{G^*}$ et on a $\omega_S(\sigma) = \omega_{S,\bar{G}}(\sigma)\omega_{\bar{G}}(\sigma)$, où $\omega_{S,\bar{G}}(\sigma) \in W^{\bar{G}}$. Par l'isomorphisme $ad_{r_\star\bar{r}_\star}$, on identifie $W^{\bar{G}}$ au groupe de Weyl $W^{\bar{G}_\star}$ de $\bar{G}_\star$ relatif à $\bar{T}_\star$. On définit $\omega_{S,T_\star}(\sigma) = \omega_{S,\bar{G}}(\sigma)\omega_{T_\star}(\sigma)^{-1}$. C'est un élément de $W^{\bar{G}_\star}$ et S s'identifie au tore $T_\star$ muni de l'action $\sigma \mapsto \omega_{S,T_\star}(\sigma) \circ \sigma$ (ce dernier σ étant l'action naturelle sur $T_\star$). Dans cette section, on identifie ainsi S à $T_\star$. On note $\bar{S} = S \cap \bar{G}_\star$, c'est-à-dire $\bar{S} = \bar{T}_\star$ muni de l'action $\sigma \mapsto \omega_{S,T_\star}(\sigma) \circ \sigma$. On note $\bar{S}_{sc}$ l'image réciproque de $\bar{S}$ dans $\bar{G}_{\star,SC}$. Ce tore s'identifie à notre précédent tore $S_{\bar{H}}$. On note aussi S_{sc} l'image réciproque de S dans G_{SC}.

En appliquant les constructions de 6.7 à notre élément $d_\star = (\eta_\star, r_\star)$, on fixe pour toute place $v \in Val(F)$ une paire de Borel $(B[d_{\star,v}], S[d_{\star,v}])$ vérifiant toutes les propriétés de ce paragraphe. On note simplement $S_{\star,v} = S[d_{\star,v}]$. Pour une extension galoisienne finie E de F, on note $S_\star(\mathbb{A}_E)$ le produit restreint des $S_{\star,v}(E_{w'})$ sur les places v de F et sur les places w' de E divisant v. La restriction est relative aux sous-groupes $S_{\star,v}(\mathfrak{o}_{w'})$ qui se définissent naturellement en presque tout couple (v, w') de places. On note $S_\star(\mathbb{A}_{\bar{F}})$ la limite inductive de $S_\star(\mathbb{A}_E)$ quand E parcourt les extensions galoisiennes finies de F. D'après le lemme 6.8, on peut fixer $u_\star \in \bar{G}_\star(\mathbb{A}_{\bar{F}})$ tel que $ad_{r_\star u_\star}(S_\star(\mathbb{A}_{\bar{F}})) = T^*(\mathbb{A}_{\bar{F}})$ et que $ad_{r_\star u_\star}$ entrelace l'action galoisienne naturelle de Γ_F sur $S_\star(\mathbb{A}_{\bar{F}})$ avec l'action $\sigma \mapsto \omega_S(\sigma) \circ \sigma_{G^*}$ sur $T^*(\mathbb{A}_{\bar{F}})$. Il en résulte que $ad_{\bar{r}_\star^{-1}u_\star}$ se restreint en un isomorphisme équivariant pour les actions de Γ_F de $S_\star(\mathbb{A}_{\bar{F}})$ sur $S(\mathbb{A}_{\bar{F}})$. De même, pour tout v, cet isomorphisme se restreint en un isomorphisme équivariant pour les actions de Γ_{F_v} de $S_{\star,v}(\bar{F}_v)$ sur $S(F_v)$. Des tores $S_{\star,v}$ se déduisent comme ci-dessus des tores $\bar{S}_{\star,v}$, $\bar{S}_{\star,v,sc}$ et $S_{\star,v,sc}$ et des isomorphismes analogues relient ces tores à $\bar{S}$, $\bar{S}_{sc}$, S_{sc}.

Ainsi, quand on considère les points sur $\bar{F}_v$, resp. $\mathbb{A}_{\bar{F}}$, on peut identifier S à $S_\star$. La différence essentielle est que S à une structure sur $\bar{F}$, donc le groupe $S(\bar{F})$ est bien défini tandis que $S_\star(\bar{F})$ n'a pas de sens. Toutefois, le groupe $Z(I_\star;\mathbb{A}_{\bar{F}})$ se plonge naturellement dans $S(\mathbb{A}_{\bar{F}})$ comme dans $S_\star(\mathbb{A}_{\bar{F}})$. Puisque $\bar{r}_\star$ et $u_\star$ appartiennent à $\bar{G}_\star$, l'isomorphisme $S(\mathbb{A}_{\bar{F}})\simeq S_\star(\mathbb{A}_{\bar{F}})$ se restreint en l'identité de $Z(I_\star;\mathbb{A}_{\bar{F}})$. Puisque $Z(I_\star)$ est défini sur F, on obtient le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} & & S(\bar{F}) & \rightarrow & S(\mathbb{A}_{\bar{F}}) \\ & \nearrow & & \nearrow & \\ Z(I_\star;\bar{F}) & \rightarrow & Z(I_\star;\mathbb{A}_{\bar{F}}) & & \downarrow \\ & & & \searrow & \\ & & & & S_\star(\mathbb{A}_{\bar{F}}) \end{array}$$

Une propriété analogue vaut pour $\bar{S}_{sc}$ et $\bar{S}_{\star,sc}$, le groupe $Z(I_\star)$ étant remplacé par $Z(\bar{G}_{\star,SC})$.

En vertu de ce que l'on a dit en 6.2, les groupes de cohomologie abélienne de $I_\star$, à coefficients dans F, F_v, $\mathbb{A}_F$ ou $\mathbb{A}_F/F$, peuvent se calculer à l'aide du complexe $\bar{S}_{sc}\to S\xrightarrow{1-\theta}(1-\theta)(S)$. Sur F_v ou $\mathbb{A}_F$, on peut aussi bien utiliser le complexe $\bar{S}_{\star,sc}\to S_\star\xrightarrow{1-\theta}(1-\theta)(S_\star)$.

On pose $\mathcal{Y}_\star=\mathcal{Y}_{\eta_\star}$. Rappelons que c'est l'ensemble des $y\in G(\bar{F})$ tels que $y\sigma(y)^{-1}\in I_\star$. Pour $y\in\mathcal{Y}_\star$, posons $\eta[y]=ad_{y^{-1}}(\eta_\star)$. L'application $y\mapsto(\eta[y],r_\star y)$ est une bijection de $\mathcal{Y}_\star$ sur D_F (la preuve est la même qu'en 5.4(4)). Grâce au lemme 5.5, l'inverse de cette bijection identifie le sous-ensemble $D_F[d_V]\subset D_F$ au sous-ensemble des $y\in\mathcal{Y}_\star$ tels que

- pour tout $v\in V$, $y\in I_\star(\bar{F}_v)G(F_v)$;
- pour tout $v\notin V$, $y\in I_\star(\bar{F}_v)\underline{K}_{\sharp,v}G(F_v)$.

On note $\mathcal{Y}_\star[d_V]$ cet ensemble. L'inverse de la bijection ci-dessus identifie $\dot{D}_F[d_V]$ à un ensemble de représentants de l'ensemble de doubles classes $I_\star(\bar{F})\backslash\mathcal{Y}_\star[d_V]/G(F)$. On note cet ensemble $\dot{\mathcal{Y}}_\star[d_V]$.

On a

(1) pour tout $y\in\mathcal{Y}_\star[d_V]$, il existe $y'\in I_\star(\bar{F})y$ tel que $y'\sigma(y')^{-1}$ appartienne au centre de $I_\star$ pour tout $\sigma\in\Gamma_F$.

Preuve. Pour $y\in\mathcal{Y}_\star[d_V]$, notons χ_y le cocycle $\sigma\mapsto y\sigma(y)^{-1}$ de Γ_F dans $I_\star$ et $\chi_{y,ad}$ son image naturelle à valeurs dans $\bar{G}_{\star,AD}$. L'automorphisme ad_y se restreint en un torseur intérieur de $G_{\eta[y]}$ sur $\bar{G}_\star$. La classe d'isomorphisme de $G_{\eta[y]}$ est déterminé par l'élément $\chi_{y,ad}\in H^1(\Gamma_F;\bar{G}_{\star,AD})$. Or, par définition de $\mathcal{Y}_\star[d_V]$, ce cocycle est localement trivial en toute place $v\in Val(F)$. Parce que le groupe $\bar{G}_{\star,AD}$ est adjoint, l'application

$$H^1(F;\bar{G}_{\star,AD})\to\oplus_{v\in Val(F)}H^1(F_v;\bar{G}_{\star,AD})$$

est injective ([S] corollaire 5.4). Donc $\chi_{y,ad}$ est trivial. Quitte à multiplier y à gauche par un élément de $\bar{G}_\star(\bar{F})\subset I_\star(\bar{F})$, on peut donc supposer que $\chi_{y,ad}(\sigma)=1$ pour tout $\sigma\in\Gamma_F$. Cela entraîne que $\chi_y(\sigma)$ appartient au centre de $I_\star$. $\square$

Remarquons que la propriété de y' entraîne que $ad_{y'}$ se restreint en un isomorphisme défini sur F de $I_{\eta[y]}$ sur $I_\star$.

Par la bijection de $\mathcal{Y}_\star[d_V]$ sur $D_F[d_V]$, la multiplication à gauche par $I_\star(\bar{F})$ correspond à la multiplication à gauche par $I_\eta(\bar{F})$. On voit qu'une telle multiplication ne modifie pas les termes intervenant dans la définition de la fonction $\bar{\varphi}[V',d_V]$. En conséquence, on peut supposer que tous les éléments de l'ensemble de représentants $\dot{\mathcal{Y}}_\star[d_V]$ satisfont la conclusion de (1). On ne perd rien non plus à supposer que $d_\star$ appartient à l'ensemble

$\dot{D}_F[d_V]$. Il revient au même de supposer que 1 appartient à $\dot{\mathcal{Y}}_\star[d_V]$. Pour $d \in \dot{D}_F[d_V]$, on a défini en 7.1 des termes $h[d]$, $\mathcal{U}[V',d]$ et, pour $u \in \mathcal{U}[V',d]$, des termes $K_{sc,v}[d,u]$, $\Delta_V[d,u]$, $\bar{f}[d,u]$. Si d correspond à $y \in \dot{\mathcal{Y}}_\star[d_V]$, on note aussi ces termes $h[y]$, $\mathcal{U}[V',y]$, $K_{sc,v}[y,u]$, $\Delta_V[y,u]$ et $\bar{f}[y,u]$. On fera une exception pour le terme $d_\star$ correspondant à $1 \in \dot{\mathcal{Y}}_\star[d_V]$. Dans ce cas, on notera $h_\star = h[1]$ et $\bar{f}_\star[u] = \bar{f}[1,u]$.

7.4 Une première propriété de nullité

Rappelons (cf. [I] 2.7) que la donnée $\mathbf{H}$ de $\bar{G}_{SC}$ définit un caractère automorphe de $\bar{G}_{AD}(\mathbb{A}_F)$, que nous notons ici $\omega_{\mathbf{H}}$. Il se transporte en un caractère automorphe de $\bar{G}_{\star,AD}(\mathbb{A}_F)$. On a un homomorphisme naturel $I_\star(\mathbb{A}_F) \to \bar{G}_{\star,AD}(\mathbb{A}_F)$ grâce auquel le caractère $\omega_{\mathbf{H}}$ devient un caractère de $I_\star(\mathbb{A}_F)$. De même, pour $y \in \dot{\mathcal{Y}}_\star(d_V]$, on a un caractère de $I_{\eta[y]}(\mathbb{A}_F)$ que l'on note encore $\omega_{\mathbf{H}}$ et qui n'est autre que le composé du caractère de $I_\star(\mathbb{A}_F)$ par l'isomorphisme ad_y entre ces deux groupes. On a aussi le caractère ω qui se restreint à chacun des groupes $I_{\eta[y]}(\mathbb{A}_F)$ et $I_\star(\mathbb{A}_F)$. Remarquons que

(1) l'isomorphisme ad_y conserve le caractère ω.

En effet, soient $v \in Val(F)$ et $x \in I_{\eta[y]}(F_v)$. Le commutateur $ad_y(x)x^{-1}$ est l'image naturelle de l'élément $ad_{y_{sc}}(x_{sc})x_{sc}^{-1}$ de G_{SC}, où y_{sc} et x_{sc} sont des éléments de G_{SC} ayant même image que y et x dans G_{AD}. Pour $\sigma \in \Gamma_{F_v}$, la condition que $y\sigma(y)^{-1}$ commute à I_η, cf. 7.3(1), implique que $\sigma(y_{sc})^{-1}y_{sc}$ commute à x_{sc}. Puisque de plus $\sigma(x_{sc}) \in Z(G_{SC})x_{sc}$, on vérifie que $ad_{y_{sc}}(x_{sc})x_{sc}^{-1}$ est fixe par σ, donc $ad_{y_{sc}}(x_{sc})x_{sc}^{-1} \in G_{SC}(F_v)$. Le caractère ω est trivial sur ce groupe. Donc $\omega(ad_y(x)x^{-1}) = 1$, ce qui prouve l'assertion (1). $\square$

Pour $v \notin V$, posons $K_{\star,v} = ad_{h_{\star,v}}(K_v) \cap \bar{G}_\star(F_v)$. C'est un sous-groupe compact hyperspécial de de $\bar{G}_\star(F_v)$. Imposons à l'ensemble de places V' de 7.1 la condition

(2) l'ensemble $\bar{G}_\star(F)\bar{G}_\star(F_{V'})\prod_{v\notin V'} K_{\star,v}$ est dense dans $\bar{G}_\star(\mathbb{A}_F)$.

Lemme. *Si $\omega_{\mathbf{H}}$ et ω ne coïncident pas sur $I_\star(\mathbb{A}_F)$, alors $\bar{\varphi}[V',d_V] = 0$.*

Preuve. Soient $y \in \dot{\mathcal{Y}}_\star[d_V]$ et $u \in \mathcal{U}[V',y]$. Rappelons la construction de la fonction $\bar{f}[y,u]$. On descend la fonction f en une fonction, disons $f[y]$, sur $G_{\eta[y]}(F_V)$. On définit la fonction $f[y]_{sc}$ sur $G_{\eta[y],SC}(F_V)$ par $f[y]_{sc} = \iota_{G_{\eta[y],SC},G_{\eta[y]}}(f[y])$. Alors $\bar{f}[y,u]$ est le transfert de $f[y]_{sc}$ à $\bar{H}(F_V)$ pour le facteur de transfert $\Delta_V[y,u]$. Notons que cette construction ne dépend que de l'image de f dans $I(\tilde{G}(F_V),\omega)$. Le groupe $Z_G(\eta[y];F_V)$ agit naturellement sur $I(G_{\eta[y],SC}(F_V))$. Parce que l'on part d'un élément de $I(\tilde{G}(F_V),\omega)$, la fonction $f[y]_{sc}$ appartient au sous-espace isotypique de $I(G_{\eta[y],SC}(F_V))$ sur lequel $Z_G(\eta[y];F_V)$ agit par le caractère ω. Le groupe $G_{\eta[y],AD}(F_V)$ agit aussi sur $G_{\eta[y],SC}(F_V)$ et sur $I(G_{\eta[y],SC}(F_V))$. Par cette action, le facteur de transfert $\Delta_V[y,u]$ se transforme par le caractère $\omega_{\mathbf{H}}^{-1}$. Donc le transfert se factorise par la projection sur le sous-espace isotypique de $I(G_{\eta[y],SC}(F_V))$ sur lequel $G_{\eta[y],AD}(F_V)$ agit par le caractère $\omega_{\mathbf{H}}$. Le groupe $I_{\eta[y]}(F_V)$ s'envoie à la fois dans $Z_G(\eta[y];F_V)$ et dans $G_{\eta[y],AD}(F_V)$ et les deux actions coïncident sur ce groupe. Cela entraîne que le transfert $\bar{f}[y,u]$ de $f[y]_{sc}$ est nul si les deux caractères ne coïncident pas sur $I_{\eta[y]}(F_V)$. D'après (1), cette condition de coïncidence équivaut à la même condition portant sur les caractères de $I_\star(F_V)$. On obtient que $\bar{\varphi}[V',d_V] = 0$ si les deux caractères $\omega_{\mathbf{H}}$ et ω de $I_\star(F_V)$ sont distincts.

Soient de nouveau $y \in \dot{\mathcal{Y}}_\star[d_V]$ et $u \in \mathcal{U}[V',y]$. Rappelons que l'on a supposé $1 \in \mathcal{U}[V',y]$. Par construction, le rapport $\Delta_V[y,u]/\Delta_V[y,1]$ est égal au produit sur les places $v \in V' - V$ des rapports de facteurs locaux normalisés $\Delta_v[y,1]/\Delta_v[y,u_v]$. Le facteur

$\Delta_v[y,1]$ est relatif au sous-groupe compact $K_{sc,v}[y,1]$ et le facteur $\Delta_v[y,u]$ est relatif au sous-groupe $K_{sc,v}[y,u] = ad_{u_v}(K_{sc,v}[y,1])$. Pour $\bar{y} \in \bar{H}(F_v)$ et $x \in G_{\eta[y],SC}(F_v)$, on a par simple transport de structure l'égalité $\Delta_v[y,u](\bar{y}, ad_{u_v}(x)) = \Delta_v[y,1](\bar{y},x)$. Mais le premier terme est égal à $\omega_{\mathbf{H}}(u_v)^{-1}\Delta_v[y,u](\bar{y},x)$. On en déduit $\Delta_v[y,1]/\Delta_v[y,u_v] = \omega_{\mathbf{H}}(u_v)^{-1}$ puis $\Delta_V[y,u]/\Delta_V[y,1] = \omega_{\mathbf{H}}(u)^{-1}$. Donc $\bar{f}[y,u] = \omega_{\mathbf{H}}(u)^{-1}\bar{f}[y,u]$. Dans la définition 7.1(3), la somme en u se récrit donc

$$\omega(h[y])\bar{f}[y,1] \sum_{u \in \mathcal{U}[V',y]} \omega(u)\omega_{\mathbf{H}}(u)^{-1}.$$

Remarquons que les deux caractères ω et $\omega_{\mathbf{H}}$ sont évidemment triviaux sur $G_{\eta[y],SC}(F^V_{V'})$ et le sont aussi sur $Z(G_{\eta[y]};F^V_{V'})$: pour $\omega_{\mathbf{H}}$, cela resulte de sa construction comme image réciproque d'un caractère de $G_{\eta[y],AD}(F^V_{V'})$; pour ω, cela résulte de l'hypothèse 5.1(4). La somme en u ci-dessus est donc égale à la somme des valeurs d'un caractère du groupe quotient

$$G_{\eta[y]}(F^V_{V'})/Z(G_{\eta[y]};F^V_{V'})G_{\eta[y],SC}(F^V_{V'}).$$

Elle est nulle si ce caractère n'est pas trivial, autrement dit si ω et $\omega_{\mathbf{H}}$ ne coïncident pas sur $G_{\eta[y]}(F^V_{V'})$. De nouveau, cela équivaut à ce que les caractères correspondant de $\bar{G}_\star(F^V_{V'})$ sont distincts. On obtient que $\bar{\varphi}[V',d_V] = 0$ si les deux caractères $\omega_{\mathbf{H}}$ et ω de $\bar{G}_\star(F^V_{V'})$ sont distincts.

Soit $v \notin V$. Comme on l'a expliqué dans la preuve du lemme 1.6, les conditions imposées à V nous autorisent à appliquer les résultats de [W1]. Le lemme 5.6(ii) de cette référence implique

(3) $I_\star(F_v) = \bar{G}_\star(F_v)(ad_{h_{\star,v}}(K_v) \cap I_\star(F_v))$.

Du groupe $K_{\star,v}$ se déduit un sous-groupe compact hyperspécial $K_{\star,ad,v}$ de $\bar{G}_{\star,AD}(F_v)$. Montrons que

(4) l'image de $ad_{h_\star}(K_v) \cap I(F_v)$ dans $\bar{G}_{\star,AD}(F_v)$ est contenue dans $K_{\star,ad,v}$.

On a dit dans la preuve du lemme 5.5 que l'application

$$Z(G)^\theta_{p'} \to ad_{h_{\star,v}}(K^{nr}_v) \cap \bar{G}_\star \backslash ad_{h_{\star,v}}(K^{nr}_v) \cap I_\star$$

était surjective. Il en résulte que l'image de $ad_{h_{\star,v}}(K^{nr}_v) \cap I_\star(F_v)$ dans $\bar{G}_{\star,AD}(F_v)$ est contenue dans celle de $ad_{h_{\star,v}}(K^{nr}_v) \cap \bar{G}_\star$, c'est-à-dire celle de $K^{nr}_{\star,v}$. Celle-ci est contenue dans $K^{nr}_{\star,ad,v}$. L'intersection de ce groupe avec $\bar{G}_{\star,AD}(F_v)$ est égale à $K_{\star,ad,v}$, d'où (4).

Puisque $V \supset V_{ram}$, ω est trivial sur $ad_{h_{\star,v}}(K_v) \cap I_\star(F_v)$. La donnée $\mathbf{H}$ est non ramifiée hors de V. Donc le caractère $\omega_{\mathbf{H}}$ est trivial sur $K_{\star,ad,v}$. D'après (4), le caractère de $I_\star(F_v)$ qui s'en déduit est trivial sur $ad_{h_{\star,v}}(K_v) \cap I_\star(F_v)$.

Achevons la preuve du lemme. Supposons $\bar{\varphi}[V',d_V] \neq 0$. On a vu que cela impliquait que ω et $\omega_{\mathbf{H}}$ coïncidaient sur $I_\star(F_V)$ et sur $\bar{G}_\star(F^V_{V'})$. Ces caractères coïncident aussi sur $K_{\star,v}$ pour $v \notin V$. Puisque ces caractères sont automorphes, la condition (2) implique qu'ils coïncident sur tout $\bar{G}_\star(\mathbb{A}_F)$. Pour $v \notin V$, la propriété (3) et le fait qu'ils sont triviaux sur $ad_{h_{\star,v}}(K_v) \cap I_\star(F_v)$ impliquent alors qu'ils coïncident sur $I_\star(F_v)$. Donc ils coïncident sur $I_\star(\mathbb{A}_F)$, ce qui prouve le lemme. □

7.5 Description de l'ensemble $\dot{\mathcal{Y}}_\star[d_V]$

Les ensembles $H^1_{ab}(F,G)$ et $H^1(\mathbb{A}_F,G)$ s'envoient naturellement dans $H^1_{ab}(\mathbb{A}_F;G)$. On note $H^1_{ab}(F,G) \times_{H^1_{ab}(\mathbb{A}_F;G)} H^1(\mathbb{A}_F,G)$ leur produit fibré au-dessus de $H^1_{ab}(\mathbb{A}_F;G)$. On a un diagramme commutatif

$$
(1) \qquad \begin{array}{ccc} H^1(F;I_\star) & \to & H^1_{ab}(F,I_\star)\times_{H^1_{ab}(\mathbb{A}_F;I_\star)} H^1(\mathbb{A}_F,I_\star) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^1(F;G) & \to & H^1_{ab}(F,G)\times_{H^1_{ab}(\mathbb{A}_F;G)} H^1(\mathbb{A}_F,G) \end{array}
$$

Soit v une place finie de F. Alors l'application naturelle $H^1(F_v;I_\star)\to H^1_{ab}(F_v;I_\star)$ est bijective ([Lab2] proposition 1.6.7). Supposons $v\not\in V$. Alors le groupe $I_\star$ est non ramifié et on définit le sous-groupe $H^1_{ab}(\mathfrak{o}_v;I_\star)\subset H^1_{ab}(F_v;I_\star)$. Rappelons que $H^1_{ab}(\mathbb{A}_F;I_\star)$ s'identifie au produit restreint des $H^1_{ab}(F_v;I_\star)$ sur toutes les places $v\in Val(F)$, la restriction étant relative aux sous-groupes $H^1_{ab}(\mathfrak{o}_v;I_\star)$ définis presque partout. On note $H^1_{ab}(\mathfrak{o}^V;I_\star)$ le produit des $H^1_{ab}(\mathfrak{o}_v;I_\star)$ sur toutes les places $v\not\in V$.

Notons $\mathbb{U}$ le sous-ensemble des $u\in H^1(F;I_\star)$ qui vérifient les trois conditions

(2) l'image de u dans $H^1_{ab}(F;G)$ par l'application issue du diagramme (1) est nulle ;

(3) pour $v\in V$, l'image de u dans $H^1(F_v;I_\star)$ est nulle ;

(4) l'image de u dans $H^1_{ab}(\mathbb{A}_F^V;I_\star)$ appartient à $H^1_{ab}(\mathfrak{o}^V;I_\star)$.

On a une application naturelle $H^1(F;Z(I_\star))\to H^1(F;I_\star)$. Montrons que

(5) son noyau Ker est un sous-groupe et l'application se quotiente en une injection $H^1(F;Z(I_\star))/Ker\to H^1(F;I_\star)$.

Preuve. Soient z_1 et z_2 deux éléments de Ker, que l'on relève en des cocycles. On peut choisir i_1 et i_2 dans $I_\star$ tels que, pour $j=1,2$ et pour tout $\sigma\in\Gamma_F$, on ait $z_j(\sigma)=i_j\sigma(i_j)^{-1}$. Puisque $z_2(\sigma)$ est central dans $I_\star$, on a

$$z_1(\sigma)z_2(\sigma)=i_1\sigma(i_1)^{-1}z_2(\sigma)=i_1z_2(\sigma)\sigma(i_1)^{-1}=i_1i_2\sigma(i_1i_2)^{-1}.$$

Donc $z_1z_2\in Ker$. On a aussi

$$z_1(\sigma)^{-1}=i_1^{-1}z_1(\sigma)^{-1}i_1=i_1^{-1}\sigma(i_1)i_1^{-1}i_1=i_1^{-1}\sigma(i_1).$$

Donc $z_1^{-1}\in Ker$ et Ker est bien un sous-groupe. Soient z_1 et z_2 deux éléments de $H^1(F;Z(I_\star))$, que l'on relève en des cocycles. Leurs images dans $H^1(F;I_\star)$ coïncident si et seulement s'il existe $i\in I_\star$ de sorte que, pour tout $\sigma\in\Gamma_F$, on ait $z_1(\sigma)=iz_2(\sigma)\sigma(i)^{-1}$. Parce que z_2 est à valeurs centrales, cela équivaut à $z_1(\sigma)z_2(\sigma)^{-1}=i\sigma(i)^{-1}$. Mais l'existence de i vérifiant cette condition équivaut à $z_1z_2^{-1}\in Ker$. D'où la seconde assertion de (5). $\square$

Notons $H^1_Z(F;I_\star)$ l'image de $H^1(F;Z(I_\star))$ dans $H^1(F;I_\star)$. Grâce à (5), cet ensemble est naturellement un groupe. On définit une application $\mathcal{Y}_\star\to H^1(F;I_\star)$ qui, à $y\in\mathcal{Y}_\star[d_V]$, associe la classe du cocycle $\sigma\mapsto y\sigma(y)^{-1}$.

Lemme. *Cette application se restreint en une bijection de $\dot{\mathcal{Y}}_\star[d_V]$ sur $\mathbb{U}$. L'ensemble $\mathbb{U}$ est un sous-groupe de $H^1_Z(F;I_\star)$.*

Preuve. Il est immédiat que notre application se quotiente en une bijection de

$$(6) \qquad I_\star(\bar{F})\backslash\mathcal{Y}_\star/G(F)$$

dans le noyau de l'application

$$(7) \qquad H^1(F;I_\star)\to H^1(F;G).$$

Rappelons que $\dot{\mathcal{Y}}_\star[d_V]$ est un ensemble de représentants de l'image de $\mathcal{Y}_\star[d_V] \subset \mathcal{Y}_\star$ dans l'ensemble de doubles classes (6). L'application se restreint donc en une injection de $\dot{\mathcal{Y}}_\star[d_V]$ dans le noyau de (7). D'après la définition de 7.3, son image est formée des éléments u de ce noyau qui vérifient la condition (3) et

(8) pour tout $v \notin V$, il existe $k \in \underline{K}_{\sharp,v}$ tel que l'image de u dans $H^1(F_v; I_\star)$ est cohomologue au cocycle $\sigma \mapsto k\sigma(k)^{-1}$.

Rappelons que, par définition de $\underline{K}_{\sharp,v}$, ce dernier cocycle prend ses valeurs dans $Z(G)^\theta \subset Z(I_\star)$. Montrons que

(9) les conditions (4) et (8) sont équivalentes.

Soit $v \notin V$. Fixons un sous-tore maximal $T_\natural$ de $\bar{G}_\star$ défini sur F_v et non ramifié. Notons T son commutant dans G et $T_{\natural,sc}$ l'image réciproque de $T_\natural$ dans $\bar{G}_{\star,SC}$. Par définition

$$H^1_{ab}(\mathfrak{o}_v; I) = H^{2,1,0}(\mathfrak{o}_v; T_{\natural,sc} \to T \overset{1-\theta}{\to} (1-\theta)(T)).$$

Le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} T_{\natural,sc} & \to & T & \overset{1-\theta}{\to} & (1-\theta)(T) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ T_{\natural,sc} & \to & T/Z(G)^\theta & \overset{1-\theta}{\to} & (1-\theta)(T) \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ T & \to & T/Z(G)^\theta & & \end{array}$$

est un triangle exact dans la catégorie des complexes de tores. On en déduit une suite exacte

$$(10) \qquad H^{1,0}(\mathfrak{o}_v; T \to T/Z(G)^\theta) \to H^{2,1,0}(\mathfrak{o}_v; T_{\natural,sc} \to T \overset{1-\theta}{\to} (1-\theta)(T))$$
$$\to H^{2,1,0}(\mathfrak{o}_v; T_{\natural,sc} \to T/Z(G)^\theta \overset{1-\theta}{\to} (1-\theta)(T)).$$

D'autre part, le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} T_{\natural,sc} & \to & T^\theta/Z(G)^\theta & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ T_{\natural,sc} & \to & T/Z(G)^\theta & \overset{1-\theta}{\to} & (1-\theta)(T) \end{array}$$

induit un isomorphisme de cohomologie

$$H^{2,1}(\mathfrak{o}_v; T_{\natural,sc} \to T^\theta/Z(G)^\theta) \simeq H^{2,1,0}(\mathfrak{o}_v; T_{\natural,sc} \to T/Z(G)^\theta \overset{1-\theta}{\to} (1-\theta)(T)).$$

Or le premier groupe est nul ([KS] lemme C.1.A). On en déduit que le premier homomorphisme de la suite (10) est surjectif. Cet homomorphisme se récrit

$$H^0_{ab}(\mathfrak{o}_v; G_\sharp) \to H^1_{ab}(\mathfrak{o}_v; I_\star)$$

où on rappelle que $G_\sharp = G/Z(G)^\theta$. L'ensemble de départ est un sous-groupe de $H^0_{ab}(F_v; G_\sharp)$, qui est un quotient de $G_\sharp(F_v)$. L'assertion 1.5(2) équivaut à dire que $H^0_{ab}(\mathfrak{o}_v; G_\sharp)$ est l'image de $K_{\sharp,v}$ dans $H^0_{ab}(F_v; G_\sharp)$. Puisque $\underline{K}_{\sharp,v}$ s'envoie surjectivement sur $K_{\sharp,v}$, on obtient une application surjective

$$(11) \qquad \underline{K}_{\sharp,v} \to H^1_{ab}(\mathfrak{o}_v; I_\star).$$

On a alors deux façons d'envoyer $\underline{K}_{\sharp,v}$ dans $H^1(F_v, I_\star)$. D'abord celle de la relation (8) : à $k \in \underline{K}_{\sharp,v}$ on associe le cocycle $\sigma \mapsto k\sigma(k)^{-1}$. On peut aussi envoyer k en un élément de

$H^1_{ab}(\mathfrak{o}_v, I_\star)$ par l'application précédente, puis on relève celui-ci en un élément de $H^1(F_v, I_\star)$ en utilisant la bijectivité de l'application $H^1(F_v, I_\star) \to H^1_{ab}(F_v, I_\star)$ ([Lab2] prop. 1.6.7). En inspectant les définitions, on s'aperçoit que les deux applications obtenues coïncident. Puisque l'application (11) est surjective, la condition (8) équivaut donc à ce que l'image de u dans $H^1_{ab}(F_v; I_\star)$ appartienne à $H^1_{ab}(\mathfrak{o}_v; I_\star)$, ce qui est la condition (4). Cela prouve (9).

Montrons que, pour $u \in H^1(F; I_\star)$ vérifiant les conditions (3) et (4), on a

(12) l'image de u dans $H^1(F; G)$ est nulle si et seulement si son image dans $H^1_{ab}(F; G)$ est nulle.

La première condition implique la seconde. Inversement, notre élément u vérifie (8) d'après (9). Cela entraîne que, pour $v \notin V$, son image dans $H^1(F_v; G)$ est nulle. En ajoutant (3), l'image de u dans $H^1(\mathbb{A}_F; G)$ est nulle. Si de plus l'image de u dans $H^1_{ab}(F; G)$ est nulle, son image dans le terme sud-est du diagramme (1) est nulle. Or l'application du bas de ce diagramme est bijective ([Lab2] théorème 1.6.10). Donc l'image de u dans $H^1(F; G)$ est nulle. Cela prouve (12).

On a vu que l'image de $\dot{\mathcal{Y}}_\star[d_V]$ dans $H^1(F; I_\star)$ est l'ensemble des u vérifiant les conditions (3) et (8) et dont l'image dans $H^1(F; G)$ est nulle. Grâce à (9) et (12), c'est exactement l'ensemble $\mathbb{U}$.

D'après 7.3(1), l'image de $\dot{\mathcal{Y}}_\star[d_V]$ dans $H^1(F; I_\star)$ est contenue dans $H^1_Z(F; I_\star)$. Il reste à prouver que cette image $\mathbb{U}$ est un sous-groupe. On vérifie facilement que les applications composées

$$H^1(F; Z(I_\star)) \to H^1(F; I_\star) \to H^1_{ab}(F; G)$$

et

$$H^1(F; Z(I_\star)) \to H^1(F; I_\star) \to H^1_{ab}(\mathbb{A}_F^V; I_\star)$$

sont des homomorphismes de groupes. On en déduit que l'ensemble des éléments de $H^1_Z(F; I_\star)$ qui vérifient les conditions (2) et (4) est un sous-groupe de $H^1_Z(F; I_\star)$. D'autre part, pour $v \in V$, on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H^1(F; Z(I_\star)) & \to & H^1(F; I_\star) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^1(F_v; Z(I_\star)) & \to & H^1(F_v; I_\star) \end{array}$$

Un élément de $H^1_Z(F; I_\star)$ vérifie (3) si et seulement si c'est l'image d'un élément de $H^1(F; Z(I_\star))$ dont l'image dans $H^1(F_v; Z(I_\star))$ pout $v \in V$ appartient au noyau de l'application du bas. La même preuve qu'en (5) montre que ce noyau est un groupe. Donc l'ensemble des éléments de $H^1_Z(F; I_\star)$ qui vérifient (3) est l'image d'un sous-groupe de $H^1(F; Z(I_\star))$. Cela conclut. $\square$

7.6 Définition d'un homomorphisme $\mathbf{q}_\infty$

Considérons les groupes

$$Q_1 = H^1(\mathbb{A}_F/F; \bar{S}_{sc}),\ Q_2 = H^0_{ab}(\mathbb{A}_F; G)/Im(H^0_{ab}(F; G)),$$

$$Q_3 = H^0_{ab}(\mathfrak{o}^V; G_\sharp) = \prod_{v \notin V} H^0_{ab}(\mathfrak{o}_v; G_\sharp)$$

définis en 6.6. Posons

$$Q_\times = Q_1 \times Q_2 \times Q_3.$$

Posons

$$Q_{1,2} = I_\star(\mathbb{A}_F),\ Q_{1,3} = H^0_{ab}(\mathfrak{o}^V; I_\star/Z(G)^\theta),\ Q_{2,3} = H^0_{ab}(\mathfrak{o}^V; G).$$

Le groupe $Q_{1,2}$ s'envoie naturellement dans $G(\mathbb{A}_F)$ lequel s'envoie dans Q_2. Il s'envoie aussi dans $\bar{G}_{\star,AD}(\mathbb{A}_F)$ puis dans $H^0_{ab}(\mathbb{A}_F; \bar{G}_{\star,AD})$. Ce dernier groupe s'identifie à $H^{1,0}(\mathbb{A}_F; \bar{S}_{sc} \to S^\theta/Z(I_\star))$, lequel s'envoie dans $H^1(\mathbb{A}_F; \bar{S}_{sc})$ puis dans Q_1. Puisque $I_\star/Z(G)^\theta$ est un sous-groupe de $G_\sharp$, $Q_{1,3}$ s'envoie naturellement dans Q_3. Le groupe $Q_{1,3}$ est un sous-groupe de $H^0_{ab}(\mathbb{A}_F; I_\star/Z(G)^\theta)$ que l'on peut identifier à $H^{1,0}(\mathbb{A}_F; \bar{S}_{sc} \to S^\theta/Z(G)^\theta)$. Ce dernier s'envoie naturellement dans $H^1(\mathbb{A}_F; \bar{S}_{sc})$ puis dans Q_1. Par composition, on obtient un homomorphisme $Q_{1,3} \to Q_1$. Le groupe $Q_{2,3}$ s'envoie naturellement dans Q_2 et Q_3. Toutes ces applications sont des homomorphismes. Ainsi, pour $1 \leq j < j' \leq 3$, on a des homomorphismes

$$\begin{array}{ccc} & & Q_j \\ & \nearrow & \\ Q_{j,j'} & & \\ & \searrow & \\ & & Q_{j'} \end{array}$$

On en déduit un homomorphisme $\mathbf{q}_{j,j'} : Q_{j,j'} \to Q_\times$ dont la composante dans Q_j est l'homomorphisme précédent, la composante dans $Q_{j'}$ est l'opposé de l'homomorphisme précédent et la dernière composante est triviale. On note Q_∞ le quotient de $Q_\times$ par le groupe engendré par les images des homomorphismes $\mathbf{q}_{j,j'}$.

Soit $u : \Gamma_F \to Z(I_\star; \bar{F})$ un cocycle dont l'image dans $H^1(F; I_\star)$ appartient à $\mathbb{U}$. Pour $v \in V$, l'image de u dans $H^1(F_v; I_\star)$ est nulle. On peut fixer $i_v \in I_\star$ de sorte que $u(\sigma) = i_v\sigma(i_v)^{-1}$ pour tout $\sigma \in \Gamma_{F_v}$. Pour $v \notin V$, u vérifie la condition 7.5(8). On peut fixer $k_v \in \underline{K}_{\sharp,v}$ et $i_v \in I_\star$ de sorte que $u(\sigma) = i_v k_v \sigma(i_v k_v)^{-1}$ pour tout $\sigma \in \Gamma_{F_v}$. Montrons que

(1) on peut supposer $k_v \in \underline{K}_{\sharp,v} \cap K_v^{nr}$ et $i_v \in I_\star(F_v^{nr}) \cap K_v^{nr}$ pour presque tout v.

Preuve. D'après le lemme 7.5, on peut fixer $y \in \dot{\mathcal{Y}}_\star[d_V]$ tel que u soit cohomologue au cocycle $\sigma \mapsto y\sigma(y)^{-1}$. Quitte à multiplier y à gauche par un élément de $I_\star(\bar{F})$, on obtient un élément $y \in G(\bar{F})$ tel que $u(\sigma) = y\sigma(y)^{-1}$ pour tout $\sigma \in \Gamma_F$. On fixe un ensemble fini V'' de places de F, contenant V, tel que, pour $v \notin V''$,

- $y \in K_v^{nr}$;
- $\eta_\star \in \tilde{K}_v$.

Soit $v \notin V''$. D'après 5.5(1), on a $\underline{K}_{\sharp,v} = Z(G)^\theta(\underline{K}_{\sharp,v} \cap K_v^{nr})$. On peut donc écrire $k_v = z_v k'_v$ avec $z_v \in Z(G)^\theta$ et $k'_v \in \underline{K}_{\sharp,v} \cap K_v^{nr}$. Puisque $Z(G)^\theta \subset I_\star$, on peut remplacer le couple (i_v, k_v) par $(i_v z_v, k'_v)$. Après ce remplacement, on a $k_v \in \underline{K}_{\sharp,v} \cap K_v^{nr}$. L'égalité $i_v k_v \sigma(i_v k_v)^{-1} = y\sigma(y)^{-1}$ pour tout $\sigma \in \Gamma_{F_v}$ implique qu'il existe $g_1 \in G(F_v)$ tel que $y = i_v k_v g_1$. Posons $g = ad_{k_v}(g_1)$. Puisque $\underline{K}_{\sharp,v}$ normalise $G(F_v)$, on a encore $g \in G(F_v)$. On a $y = i_v g k_v$. D'où

$$ad_{g^{-1}}(\eta_\star) = ad_{k_v y^{-1} i_v}(\eta_\star) = ad_{k_v y^{-1}}(\eta_\star) \in ad_{k_v y^{-1}}(\tilde{K}_v^{nr}) = \tilde{K}_v^{nr}.$$

Puisque $ad_{g^{-1}}(\eta_\star) \in \tilde{G}(F_v)$, cela entraîne $ad_{g^{-1}}(\eta_\star) \in \tilde{K}_v$. Comme on l'a expliqué dans la preuve du lemme 1.6, on peut appliquer les résultats de [W1] 5.6. Le (ii) du lemme de cette référence implique que $g \in \bar{G}_\star(F_v)K_v$. Ecrivons $g = xk'$, avec $x \in \bar{G}_\star(F_v)$ et $k' \in K_v$. On peut remplacer notre couple (i_v, k_v) par $(i_v x, k' k_v)$. Notons simplement (i_v, k_v) ce nouveau couple. Il vérifie les mêmes propriétés que l'ancien mais vérifie de plus $y = i_v k_v$. Donc $i_v k_v \in K_v^{nr}$. Puisque $k_v \in K_v^{nr}$, cela entraîne $i_v \in I_\star(F_v^{nr}) \cap K_v^{nr}$. $\square$

On suppose vérifiée la condition (1). Soit $v \in Val(F)$. Si $v \in V$, on a $i_v\sigma(i_v)^{-1} = u(\sigma)$ donc $i_v\sigma(i_v)^{-1} \in Z(I_\star)$ pour tout $\sigma \in \Gamma_{F_v}$. La même propriété vaut si $v \notin V$ car alors $k_v\sigma(k_v)^{-1} \in Z(G)^\theta \subset Z(I_\star)$. Donc l'image $i_{v,ad}$ de i_v dans $\bar{G}_{\star,AD}$ appartient à $\bar{G}_{\star,AD}(F_v)$. On a des applications naturelles

$$\bar{G}_{\star,AD}(F_v) \to H^1(F_v; Z(\bar{G}_{\star,SC})) \to H^1(F_v; \bar{S}_{sc}).$$

Pour presque tout v, le groupe $K_v \cap \bar{G}_\star(F_v)$ est un sous-groupe compact hyperspécial de $\bar{G}_\star(F_v)$. Il détermine un tel sous-groupe $\bar{K}_{\star,v,ad}$ de $\bar{G}_{\star,AD}(F_v)$. La condition (1) entraîne que $i_{v,ad}$ appartient à ce sous-groupe pour presque tout v. Si de plus, $\bar{S}_{sc}$ est non ramifié en v, on voit que l'image de $i_{v,ad}$ par l'application précédente appartient au sous-groupe $H^1(\mathfrak{o}_v; \bar{S}_{sc})$, qui est nul. On a ainsi construit pour tout v un élément de $H^1(F_v; \bar{S}_{sc})$ qui est nul pour presque tout v. La collection de ces termes est un élément de $H^1(\mathbb{A}_F; \bar{S}_{sc})$. On l'envoie dans Q_1 par l'application naturelle. Notons u_1 l'élément de Q_1 obtenu.

Fixons comme dans la preuve de (1) un élément $y \in G(\bar{F})$ tel que $u(\sigma) = y\sigma(y)^{-1}$ pour tout $\sigma \in \Gamma_F$. Fixons une décomposition $y = z\pi(y_{sc})$, avec $z \in Z(G; \bar{F})$ et $y_{sc} \in G_{SC}(\bar{F})$. Pour unifier les notations, posons $k_v = 1$ pour $v \in V$. Pour tout $v \in Val(F)$, fixons une décomposition $i_vk_v = z_v\pi(x_{sc,v})$, avec $z_v \in Z(G; \bar{F}_v)$ et $x_{sc,v} \in G_{SC}(\bar{F}_v)$. Pour $\sigma \in \Gamma_{F_v}$, les termes $y_{sc}\sigma(y_{sc})^{-1}$ et $x_{sc,v}\sigma(x_{sc,v})^{-1}$ ont même image dans G_{AD} : c'est l'image de $u(\sigma)$. Celle-ci appartient à l'image dans G_{AD} de $Z(I_\star)$, laquelle est contenu dans celle de $S_{\star,v}$. Il en résulte que les termes ci-dessus appartiennent à $S_{\star,sc,v}(\bar{F}_v)$ et que leur rapport appartient à $Z(G_{SC}; \bar{F}_v)$. Posons $\chi_v(\sigma) = \sigma(x_{sc,v})x_{sc,v}^{-1}y_{sc}\sigma(y_{sc})^{-1}$. L'égalité

$$i_vk_v\sigma(i_vk_v)^{-1} = u(\sigma) = y\sigma(y)^{-1}$$

entraîne que le couple (χ_v, zz_v^{-1}) est un cocycle de Γ_{F_v} dans le complexe $Z(G_{SC}) \to Z(G)$, que l'on pousse en un cocycle à valeurs dans le complexe $S_{sc} \to S$. On obtient ainsi un élément de $H^0(F_v; S_{sc} \to S) = H^0_{ab}(F_v; G)$. Il est clair que cet élément ne dépend pas des décompositions choisies de y et i_vk_v. Pour presque tout v, on a $y_{sc} \in K^{nr}_{sc,v}$ et $z \in K^{nr}_v$. L'hypothèse (1) permet de choisir des éléments $x_{sc,v} \in K_{sc,v}$ et $z_v \in K^{nr}_v$. On vérifie alors que l'élément de $H^0_{ab}(F_v; G)$ que l'on vient de construire appartient à $H^0_{ab}(\mathfrak{o}_v; G)$. La collection de ces éléments appartient à $H^0_{ab}(\mathbb{A}_F; G)$. On pousse cet élément en un élément de Q_2 que l'on note u_2. On a choisi pour le construire un élément y. Mais on ne peut modifier y qu'en le multipliant à droite par un élément $g \in G(F)$. On vérifie qu'une telle multiplication multiplie l'élément de $H^0_{ab}(\mathbb{A}_F; G)$ que l'on a construit par l'image de g^{-1} dans ce groupe par la suite d'applications

$$G(F) \to H^0_{ab}(F; G) \to H^0_{ab}(\mathbb{A}_F; G).$$

Donc l'image u_2 dans Q_2 est inchangée.

Pour tout $v \notin V$, k_v a une image naturelle dans $H^0_{ab}(\mathfrak{o}_v; G_\sharp)$, cf. 6.2(1). On note u_3 le produit de ces éléments dans Q_3.

Notons $\mathbf{q}_\infty(u)$ l'image dans Q_∞ du triplet $(u_1, u_2, u_3) \in Q_\times$.

Lemme. *(i) L'élément $\mathbf{q}_\infty(u)$ ne dépend pas des choix effectués.*

(ii) L'application $u \mapsto \mathbf{q}_\infty(u)$ se quotiente en un homomorphisme de $\mathbb{U}$ dans Q_∞.

Notation. On notera encore $\mathbf{q}_\infty$ cet homomorphisme de $\mathbb{U}$ dans Q_∞.

Preuve. Le cocycle u étant fixé, les choix sont ceux des éléments i_v et k_v. Pour une place $v \in Val(F)$, considérons d'autres choix i'_v, k'_v. Notons u'_1 etc... les analogues de u_1

etc... construits à l'aide de ces nouveaux choix. Supposons d'abord $v \in V$. On a alors $k_v = k'_v = 1$ et $u'_3 = u_3$. La relation $i_v\sigma(i_v)^{-1} = u(\sigma) = i'_v\sigma(i'_v)^{-1}$ implique qu'il existe $g \in G(F_v)$ tel que $i'_v = i_v g$. Puisque i_v et i'_v appartiennent à $I_\star$, on a $g \in I_\star(F_v)$. Cet élément g s'envoie en un élément de $Q_{1,2}$. On voit que le couple (u'_1, u'_2) est le produit de (u_1, u_2) et de l'image par $\mathbf{q}_{1,2}$ de cet élément de $Q_{1,2}$. Donc les images dans Q_∞ de (u_1, u_2, u_3) et de (u'_1, u'_2, u'_3) sont égales. Supposons maintenant $v \notin V$. On a fixé un élément $h_{\star,v} \in G(F_v)$ tel que $ad_{h_{\star,v}^{-1}}(\eta_\star) \in \tilde{K}_v$. Remarquons que, puisque $k_v\sigma(k_v)^{-1}$ est central pour tout $\sigma \in \Gamma_{F_v}$, on a l'égalité

$$h_{\star,v}k_v\sigma(h_{\star,v}k_v)^{-1} = k_v\sigma(k_v)^{-1}.$$

On a donc $u(\sigma) = i_v h_{\star,v}k_v\sigma(i_v h_{\star,v}k_v)^{-1}$ pour tout $\sigma \in \Gamma_{F_v}$. On a une relation analogue avec i'_v et k'_v. Cela entraîne qu'il existe $g_1 \in G(F_v)$ tel que $i'_v h_{\star,v}k'_v = i_v h_{\star,v}k_v g_1$. Posons $g = ad_{k_v}(g_1)$. On a encore $g \in G(F_v)$ et on a $i'_v h_{\star,v}k'_v = i_v h_{\star,v} g k_v$. On a alors

$$ad_{g^{-1}} \circ ad_{h_{\star,v}^{-1}}(\eta_\star) = ad_{k_v(k'_v)^{-1}} \circ ad_{h_{\star,v}^{-1}} \circ ad_{(i'_v)^{-1}i_v}(\eta_\star) = ad_{k_v(k'_v)^{-1}} \circ ad_{h_{\star,v}^{-1}}(\eta_\star)$$

$$\in ad_{k_v(k'_v)^{-1}}(\tilde{K}_v) = \tilde{K}_v.$$

D'après le lemme 5.6(ii) de [W1], cela implique $g \in G_{ad_{h_{\star,v}^{-1}}(\eta_\star)}(F_v)K_v = ad_{h_{\star,v}^{-1}}(\bar{G}_\star(F_v))K_v$. Ecrivons $g = ad_{h_{\star,v}^{-1}}(a)b$, avec $a \in \bar{G}_\star(F_v)$ et $b \in K_v$. Posons $i''_v = i_v a$ et $k''_v = bk_v$. On voit que le couple (i''_v, k''_v) est encore un choix possible, donnant naissance à des termes u''_1 etc... On a de plus $i'_v h_{\star,v}k'_v = i''_v h_{\star,v}k''_v$. L'élément a a une image naturelle $\underline{a} \in Q_{1,2}$. L'élément b a une image naturelle $\underline{b} \in Q_{2,3}$. On vérifie que (u''_1, u''_2, u''_3) est le produit de (u_1, u_2, u_3) et de $\mathbf{q}_{1,2}(\underline{a})\mathbf{q}_{2,3}(\underline{b})^{-1}$. Donc les images dans Q_∞ de (u''_1, u''_2, u''_3) et de (u_1, u_2, u_3) sont égales. Pour simplifier les notations, on peut supposer maintenant $i''_v = i_v$ et $k''_v = k_v$. On a alors l'égalité $i'_v h_{\star,v}k'_v = i_v h_{\star,v}k_v$. Posons $j = i_v^{-1}i'_v = h_{\star,v}k_v(k'_v)^{-1}h_{\star,v}^{-1}$. Alors $j \in I_\star(\bar{F}_v) \cap ad_{h_{\star,v}}(\underline{K}_{\sharp,v})$. D'après 5.5(1), cette intersection est égale au produit de $Z(G)^\theta$ et de

$$I_\star(\bar{F}_v) \cap ad_{h_{\star,v}}(\underline{K}_{\sharp,v} \cap K_v^{nr}).$$

Le groupe $\bar{G}_\star(F_v) \cap ad_{h_{\star,v}}(K_v)$ est un sous-groupe compact hyperspécial de $\bar{G}_\star(F_v)$, qui donne naissance à un tel sous-groupe $\bar{K}_{\star,ad,v}$ de $\bar{G}_{\star,AD}(F_v)$. La propriété précédente entraîne que l'image j_{ad} de j dans $\bar{G}_{\star,AD}(F_v)$ appartient à $\bar{K}_{\star,ad,v}$. Elle définit donc un élément $\underline{j}$ de $Q_{1,3}$. On voit que $u'_2 = u_2$ tandis que (u'_1, u'_3) est le produit de (u_1, u_3) et de $\mathbf{q}_{1,3}(\underline{j})$. De nouveau, les images dans Q_∞ de (u_1, u_2, u_3) et de (u'_1, u'_2, u'_3) sont égales. Cela prouve le (i) de l'énoncé.

Considérons deux cocycles u et u' de Γ_F dans $Z(I_\star; \bar{F})$ qui ont même image dans $H^1(F; I_\star)$, cette image appartenant à $\mathbb{U}$. Alors on peut fixer $i \in I_\star(\bar{F})$ tel que $u'(\sigma) = iu(\sigma)\sigma(i)^{-1}$ pour tout $\sigma \in \Gamma_F$. Cette relation implique que $i\sigma(i)^{-1} \in Z(I_\star; \bar{F})$. Des données i_v et k_v étant fixées pour tout v pour le cocycle u, on peut choisir pour u' les données $i'_v = ii_v$ et $k'_v = k_v$. On note u_1 etc... les termes associés à u et aux données i_v et k_v et u'_1 etc... ceux associés à u' et aux données i'_v et k'_v. On a trivialement $u'_3 = u_3$. La relation $i\sigma(i)^{-1} \in Z(I_\star; \bar{F})$ pour tout $\sigma \in \Gamma_F$ implique que l'image i_{ad} de i dans $\bar{G}_{\star,AD}$ appartient à $\bar{G}_{\star,AD}(F)$. On voit que u'_1 est le produit de u_1 et de l'image de i_{ad} par la suite d'applications naturelles

$$\bar{G}_{\star,AD}(F) \to H^1(F; Z(\bar{G}_{\star,SC})) \to H^1(F; \bar{S}_{sc}) \to H^1(\mathbb{A}_F/F; \bar{S}_{sc}) = Q_1.$$

Or la dernière application ci-dessus est nulle, donc $u'_1 = u_1$. Dans la construction de u_2, on a choisi un élément $y \in G(\bar{F})$ tel que $u(\sigma) = y\sigma(y)^{-1}$ pour tout $\sigma \in \Gamma_F$. On peut choisir pour u' l'élément $y' = iy$. On vérifie alors que $u'_2 = u_2$. Donc $\mathbf{q}_\infty(u') = \mathbf{q}_\infty(u)$. Cela prouve que l'application $\mathbf{q}_\infty$ se quotiente en une application de $\mathbb{U}$ dans Q_∞.

Considérons deux cocycles u et u' de Γ_F dans $Z(I_\star;\bar{F})$ dont les images dans $H^1(F;I_\star)$ appartiennent à $\mathbb{U}$. Posons $u'' = uu'$. Choisissons pour toute place v des données i_v et k_v pour u et des données i'_v et k'_v pour u'. Pour tout v et tout $\sigma \in \Gamma_{F_v}$, on a

$$u''(\sigma) = u(\sigma)u'(\sigma) = i_v k_v \sigma(i_v k_v)^{-1} u'(\sigma) = k_v\sigma(k_v)^{-1} i_v \sigma(i_v)^{-1} u'(\sigma),$$

parce que $k_v\sigma(k_v)^{-1} \in Z(G)$. Puis

$$u''(\sigma) = k_v\sigma(k_v)^{-1} i_v u'(\sigma)\sigma(i_v)^{-1}$$

parce que $u'(\sigma) \in Z(I_\star)$. Puis

$$u''(\sigma) = k_v\sigma(k_v)^{-1} i_v i'_v k'_v \sigma(i'_v k'_v)^{-1}\sigma(i_v)^{-1} = k_v\sigma(k_v)^{-1} i_v i'_v k'_v \sigma(i_v i'_v k'_v)^{-1}$$
$$= i_v i'_v k'_v k_v \sigma(k_v)^{-1}\sigma(i_v i'_v k'_v)^{-1}$$

toujours parce que $k_v\sigma(k_v)^{-1} \in Z(G)$. D'où

$$u''(\sigma) = i_v i'_v k'_v k_v \sigma(i_v i'_v k'_v k_v)^{-1}.$$

Pour u'', on peut donc choisir pour données $i''_v = i_v i'_v$ et $k''_v = k'_v k_v$. On note u_1 etc..., u'_1 etc..., u''_1 etc... les termes construits avec ces différentes données. Il est immédiat que $u''_1 = u_1 u'_1$ et $u''_3 = u_3 u'_3$. Pour construire le terme u_2, on doit choisir un élément $y \in G(\bar{F})$ tel que $u(\sigma) = y\sigma(y)^{-1}$ pour tout $\sigma \in \Gamma_F$ et des décompositions $y = z\pi(y_{sc})$ et $i_v k_v = z_v \pi(x_{sc,v})$. Pour cette dernière, on peut choisir des décompositions $i_v = a_v\pi(i_{sc,v})$ et $k_v = b_v\pi(k_{sc,v})$ avec $a_v, b_v \in Z(G)$ et $i_{sc,v}, k_{sc,v} \in G_{SC}$. On pose alors $z_v = a_v b_v$, $x_{sc,v} = i_{sc,v}k_{sc,v}$. On choisit des termes analogues pour u', que l'on affecte d'un $'$. Pour u'', on choisit un terme y'' et une décomposition $y'' = z''\pi(y''_{sc})$. On peut choisir $i''_{sc,v} = i_{sc,v}i'_{sc,v}$, $a''_v = a_v a'_v$, $k''_{sc,v} = k'_{sc,v}k_{sc,v}$, $b''_v = b'_v b_v$. Pour $\sigma \in \Gamma_{F_v}$, posons

$$\chi_v(\sigma) = \sigma(x_{sc,v})x_{sc,v}^{-1}\sigma(x'_{sc,v})(x'_{sc,v})^{-1}x''_{sc,v}\sigma(x''_{sc,v})^{-1}.$$

Parce que $k_v\sigma(k_v)^{-1} \in Z(G)$, on a $k_{sc,v}\sigma(k_{sc,v})^{-1} \in Z(G_{SC})$. Notons $I_{\star,sc}$ l'image réciproque dans G_{SC} de l'image de $I_\star$ dans G_{AD}. On a $i_{sc,v} \in I_{\star,sc}$. Parce que $i_v\sigma(i_v)^{-1} \in Z(I_\star)$, on a $i_{sc,v}\sigma(i_{sc,v})^{-1} \in Z(I_{\star,sc})$. De mêmes propriétés valent pour $k'_{sc,v}$, $k''_{sc,v}$, $i'_{sc,v}$ et $i''_{sc,v}$. On calcule alors

$$\chi_v(\sigma) = \sigma(k_{sc,v})k_{sc,v}^{-1}\sigma(k'_{sc,v})(k'_{sc,v})^{-1}k''_{sc,v}\sigma(k''_{sc,v})^{-1} \tag{2}$$
$$\sigma(i_{sc,v})i_{sc,v}^{-1}\sigma(i'_{sc,v})(i'_{sc,v})^{-1}i''_{sc,v}\sigma(i''_{sc,v})^{-1}.$$

On a

$$k''_{sc,v}\sigma(k''_{sc,v})^{-1} = k'_{sc,v}k_{sc,v}\sigma(k_{sc,v})^{-1}\sigma(k'_{sc,v})^{-1} = k'_{sc,v}\sigma(k'_{sc,v})^{-1}k_{sc,v}\sigma(k_{sc,v})^{-1}$$

et les six premiers termes de (2) disparaissent. On a aussi

$$\sigma(i_{sc,v})i_{sc,v}^{-1}\sigma(i'_{sc,v})(i'_{sc,v})^{-1} = \sigma(i_{sc,v})\sigma(i'_{sc,v})(i'_{sc,v})^{-1}i_{sc,v}^{-1} = \sigma(i''_{sc,v})(i''_{sc,v})^{-1}$$

et les six derniers termes de (2) disparaissent. D'où $\chi_v(\sigma) = 1$. En appliquant les définitions, on voit alors que $u_2u'_2(u''_2)^{-1}$ est l'image dans Q_2 du cocycle $(\xi, zz'(z'')^{-1}) \in H^0_{ab}(\mathbb{A}_F;G)$, où ξ est défini par

$$\xi(\sigma) = y_{sc}\sigma(y_{sc})^{-1}y'_{sc}\sigma(y'_{sc})^{-1}\sigma(y''_{sc})(y''_{sc})^{-1}.$$

Ce cocycle est l'image d'un élément de $H^0_{ab}(F;G)$. Or $H^0_{ab}(F;G)$ s'envoie sur 0 dans Q_2. D'où $u''_2 = u_2u'_2$. Cela prouve que l'application $\mathbf{q}_\infty$, quotientée en une application définie sur $\mathbb{U}$, est un homomorphisme. $\square$

7.7 L'image de l'homomorphisme $\mathbf{q}_\infty$

Rappelons que

$$Q = H^{1,0}(\mathbb{A}_F/F; S_{sc} \stackrel{1-\theta}{\to} (1-\theta)(S)).$$

Pour $j = 1,2,3$, on a défini en 6.6 un homomorphisme $\mathbf{q}_j : Q_j \to Q$. On en déduit un homomorphisme produit

$$(1) \qquad Q_\times = Q_1 \times Q_2 \times Q_3 \to Q.$$

Montrons que

(2) pour $1 \leq j < j' \leq 3$, le composé de l'homomorphisme (1) et de $\mathbf{q}_{j,j'}$ est nul.

Prouvons-le pour $(j,j') = (1,2)$, la démonstration étant similaire pour les autres couples. Il s'agit de prouver que le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} & Q_{1,2} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ Q_1 \arrow[dr, "\mathbf{q}_1"'] & & Q_2 \arrow[dl, "\mathbf{q}_2"] \\ & Q & \end{tikzcd}$$

est commutatif, où les flèches du haut sont celles définies en 7.6.

Le composé des homomorphismes de gauche est composé de

$$Q_{1,2} = I_\star(\mathbb{A}_F) \to H^0_{ab}(\mathbb{A}_F; I_\star) \to H^0_{ab}(\mathbb{A}_F; \bar{G}_{\star,AD}) = H^{1,0}(\mathbb{A}_F; \bar{S}_{sc} \to S^\theta/Z(I_\star))$$

$$\to H^1(\mathbb{A}_F; \bar{S}_{sc}) \to Q_1 = H^1(\mathbb{A}_F/F; \bar{S}_{sc}) \to H^{1,0}(\mathbb{A}_F/F; S_{sc} \stackrel{1-\theta}{\to} (1-\theta)(S)).$$

On peut remplacer les deux derniers homomorphismes par

$$H^1(\mathbb{A}_F; \bar{S}_{sc}) \to H^{1,0}(\mathbb{A}_F; S_{sc} \stackrel{1-\theta}{\to} (1-\theta)(S)) \to H^{1,0}(\mathbb{A}_F/F; S_{sc} \stackrel{1-\theta}{\to} (1-\theta)(S)).$$

Le composé des homomorphismes de droite du diagramme est composé de

$$Q_{1,2} = I_\star(\mathbb{A}_F) \to H^0_{ab}(\mathbb{A}_F; I_\star) \to H^0_{ab}(\mathbb{A}_F; G) \to Q_2 = H^0_{ab}(\mathbb{A}_F; G)/Im(H^0_{ab}(F; G)$$

$$\to H^0_{ab}(\mathbb{A}_F/F; G) = H^{1,0}(\mathbb{A}_F/F; S_{sc} \to S) \to H^{1,0}(\mathbb{A}_F/F; S_{sc} \stackrel{1-\theta}{\to} (1-\theta)(S)).$$

Il est égal au composé de

$$Q_{1,2} = I_\star(\mathbb{A}_F) \to H^0_{ab}(\mathbb{A}_F; I_\star) \to H^0_{ab}(\mathbb{A}_F; G) = H^{1,0}(\mathbb{A}_F; S_{sc} \to S)$$

$$\to H^{1,0}(\mathbb{A}_F; S_{sc} \stackrel{1-\theta}{\to} (1-\theta)(S)) \to H^{1,0}(\mathbb{A}_F/F; S_{sc} \stackrel{1-\theta}{\to} (1-\theta)(S)).$$

Ainsi, nos deux homomorphismes se factorisent par des homomorphismes

$$H^0_{ab}(\mathbb{A}_F; I_\star) \to H^{1,0}(\mathbb{A}_F; S_{sc} \stackrel{1-\theta}{\to} (1-\theta)(S)),$$

que l'on décompose en produits d'homomorphismes locaux

$$H^0_{ab}(F_v; I_\star) \to H^{1,0}(F_v; S_{sc} \stackrel{1-\theta}{\to} (1-\theta)(S)).$$

On fixe v et il suffit de montrer que ces homomorphismes locaux sont égaux. Rappelons que $H^0_{ab}(F_v;I_\star)=H^{1,0}(F_v;\bar{S}_{sc}\to S^\theta)$. On vérifie que le premier homomorphisme est déduit du composé des homomorphismes suivants de complexes de tores

$$\begin{array}{ccc}\bar{S}_{sc} & \to & S^\theta\\ \downarrow & & \downarrow\\ \bar{S}_{sc} & \to & 0\\ \downarrow & & \downarrow\\ S_{sc} & \stackrel{1-\theta}{\to} & (1-\theta)(S)\end{array}$$

Le second est déduit du composé des homomorphismes suivants de complexes de tores

$$\begin{array}{ccc}\bar{S}_{sc} & \to & S^\theta\\ \downarrow & & \downarrow\\ S_{sc} & \to & S\\ \downarrow & & \downarrow 1-\theta\\ S_{sc} & \stackrel{1-\theta}{\to} & (1-\theta)(S)\end{array}$$

Mais les deux homomorphismes composés

$$\begin{array}{ccc}\bar{S}_{sc} & \to & S^\theta\\ \downarrow & & \downarrow\\ S_{sc} & \stackrel{1-\theta}{\to} & (1-\theta)(S)\end{array}$$

sont égaux. Cela prouve l'égalité de nos homomorphismes. D'où (2).

Grâce à (2), l'homomorphisme (1) se quotiente en un homomorphisme $\mathbf{q}_0:Q_\infty\to Q$. Son image est égale au groupe Q_0 défini en 6.6.

Lemme. *L'image de l'homomorphisme $\mathbf{q}_\infty$ est égale au noyau de $\mathbf{q}_0$.*

Preuve. Montrons d'abord que l'image de $\mathbf{q}_\infty$ est contenue dans le noyau de $\mathbf{q}_0$. On introduit les notations suivantes pour les homomorphismes naturels

$$\begin{array}{ccccc}\bar{G}_{\star,SC} & & \stackrel{\bar{\pi}_\star}{\to} & & G\\ & \bar{\pi}_{\star,sc}\searrow & & \nearrow\pi & \\ & & G_{SC} & & \end{array}$$

Soit $u:\Gamma_F\to Z(I_\star)$ un cocycle dont l'image dans $H^1(F;I_\star)$ appartient à $\mathbb{U}$. On fixe $y\in G(\bar{F})$ tel que $u(\sigma)=y\sigma(y)^{-1}$ pour tout $\sigma\in\Gamma_F$. On fixe $y_{sc}\in G_{SC}(\bar{F})$ et $z\in Z(G;\bar{F})$ tels que $y=z\pi(y_{sc})$. Pour toute place v, on fixe des éléments i_v et k_v comme en 7.6. On fixe

- $z_v\in Z(G;\bar{F}_v)$ et $x_{sc,v}\in G_{SC}(\bar{F}_v)$ tels que $i_vk_v=z_v\pi(x_{sc,v})$;

- $\zeta_v\in Z(I_\star;\bar{F}_v)$ et $\bar{i}_{sc,v}\in\bar{G}_{\star,SC}(\bar{F}_v)$ tels que $i_v=\zeta_v\bar{\pi}_\star(\bar{i}_{sc,v})$;

- $b_v\in Z(G;\bar{F}_v)$ et $k_{sc,v}\in G_{SC}(\bar{F}_v)$ tels que $k_v=b_v\pi(k_{sc,v})$ (on prend $b_v=1$ et $k_{sc,v}=1$ pour $v\in V$).

Reprenons les constructions des termes u_1, u_2 et u_3 de 7.6. De l'isomorphisme $ad_{\bar{r}_\star^{-1}u_\star}:\bar{S}_\star\to\bar{S}$ se déduisent des isomorphismes

$$H^1(\mathbb{A}_F;\bar{S}_{\star,sc})\to H^1(\mathbb{A}_F;\bar{S}_{sc}),$$

$$H^{1,0}(\mathbb{A}_F; S_{\star,sc} \to S_\star) \to H^{1,0}(\mathbb{A}_F; S_{sc} \to S),$$
$$H^{1,0}(\mathbb{A}_F; S_{\star,sc} \to S_\star/Z(G)^0) \to H^{1,0}(\mathbb{A}_F; S_{sc} \to S/Z(G)^0).$$

Les espaces d'arrivée s'envoient ensuite respectivement dans Q_1, Q_2 et Q_3. Les espaces de départ s'envoient donc eux-aussi dans ces groupes.

Le terme u_1 est l'image par l'application ainsi définie de l'élément de $H^1(\mathbb{A}_F; \bar{S}_{\star,sc})$ dont la composante en v est le cocycle $\sigma \mapsto \bar{i}_{sc,v}\sigma(\bar{i}_{sc,v})^{-1}$. Le terme u_2 est l'image de l'élément de $H^{1,0}(\mathbb{A}_F; S_{\star,sc} \to S_\star)$ dont la composante en v est le couple formé du cocycle $\sigma \mapsto y_{sc}\sigma(y_{sc})^{-1}\sigma(x_{sc,v})x_{sc,v}^{-1}$ et de l'élement zz_v^{-1} de $S_\star$. Le terme u_3 est l'image de l'élément de $H^{1,0}(\mathbb{A}_F; S_{\star,sc} \to S_\star/Z(G)^0)$ dont la composante en v est le couple formé du cocycle $\sigma \mapsto k_{sc,v}\sigma(k_{sc,v})^{-1}$ et de l'image de b_v dans $S_\star/Z(G)^0$.

On envoie u_1, u_2 et u_3 dans Q et on fait le produit. On obtient l'image naturelle d'un élément de $H^{1,0}(\mathbb{A}_F; S_{\star,sc} \stackrel{1-\theta}{\to} (1-\theta)(S_\star))$ dont la composante en v est $(\chi_v, (1-\theta)(zz_v^{-1}b_v))$, où χ_v est défini par

$$\chi_v(\sigma) = \bar{\pi}_{\star,sc}(\bar{i}_{sc,v}\sigma(\bar{i}_{sc,v})^{-1})k_{sc,v}\sigma(k_{sc,v})^{-1}y_{sc}\sigma(y_{sc})^{-1}\sigma(x_{sc,v})x_{sc,v}^{-1}.$$

L'élément $\sigma(x_{sc,v})x_{sc,v}^{-1}$ appartient à $S_{\star,sc,v}(\bar{F}_v)$ et on ne change pas $\chi_v(\sigma)$ en le conjuguant par cet élément. On obtient

$$\chi_v(\sigma) = X_v(\sigma)y_{sc}\sigma(y_{sc})^{-1},$$

où
$$X_v(\sigma) = \sigma(x_{sc,v})x_{sc,v}^{-1}\bar{\pi}_{\star,sc}(\bar{i}_{sc,v}\sigma(\bar{i}_{sc,v})^{-1})k_{sc,v}\sigma(k_{sc,v})^{-1}.$$
Parce que $k_v\sigma(k_v)^{-1} \in Z(G)$, on a $k_{sc,v}\sigma(k_{sc,v})^{-1} \in Z(G_{SC})$ et on peut récrire

$$X_v(\sigma) = \sigma(x_{sc,v})x_{sc,v}^{-1}\bar{\pi}_{\star,sc}(\bar{i}_{sc,v})k_{sc,v}\sigma(k_{sc,v})^{-1}\sigma(\bar{\pi}_{\star,sc}(\bar{i}_{sc,v}))^{-1}$$
$$= \sigma(x_{sc,v})x_{sc,v}^{-1}\tau_v^{-1}x_{sc,v}\sigma(x_{sc,v})^{-1}\sigma(\tau_v),$$

où $\tau_v = x_{sc,v}k_{sc,v}^{-1}\bar{\pi}_{\star,sc}(\bar{i}_{sc,v})^{-1}$. Il résulte des définitions que $\pi(\tau_v) = z_v^{-1}b_v\zeta_v$. Ce dernier terme appartient à $Z(G;\bar{F}_v)Z(I_\star;\bar{F}_v) \subset S_{\star,v}(\bar{F}_v)$. Donc $\tau_v \in S_{\star,sc,v}(\bar{F}_v)$. En particulier, il commute à $x_{sc,v}\sigma(x_{sc,v})^{-1}$ et on obtient simplement $X_v(\sigma) = \tau_v^{-1}\sigma(\tau_v)$. L'élément $\sigma(\tau_v)$ commute aussi à $\chi_v(\sigma)$ et on obtient

$$\chi_v(\sigma) = \sigma(\tau_v)^{-1}\chi_v(\sigma)\sigma(\tau_v) = \sigma(\tau_v)^{-1}X_v(\sigma)y_{sc}\sigma(y_{sc})^{-1}\sigma(\tau_v) = \tau_v^{-1}y_{sc}\sigma(y_{sc})^{-1}\sigma(\tau_v).$$

Le couple $(\chi_v, (1-\theta)(zz_v^{-1}b_v))$ est cohomologue au cocycle $(\chi'_v, (1-\theta)(zz_v^{-1}b_v\pi(\tau_v^{-1})))$, où $\chi'_v(\sigma) = y_{sc}\sigma(y_{sc})^{-1}$. On calcule $z_v^{-1}b_v\pi(\tau_v^{-1}) = \zeta_v^{-1}$. Or cet élément appartient à $Z(I_\star)$ donc est annulé par $1-\theta$. Notre cocycle est donc cohomologue au cocycle $(\chi'_v, (1-\theta)(z))$. Notons que χ'_v prend ses valeurs dans $Z(I_{\star,sc})$ et que $z \in Z(G)$. L'automorphisme $ad_{\bar{r}_\star^{-1}u_\star}$ est l'identité sur ces groupes. Notre cocycle se transporte donc en un cocycle défini par les mêmes formules, à valeurs cette fois dans le complexe $S_{sc}(\bar{F}_v) \stackrel{1-\theta}{\to} ((1-\theta)(S))(\bar{F}_v)$. Il devient alors la composante en v d'un cocycle de Γ_F dans le complexe $S_{sc}(\bar{F}) \stackrel{1-\theta}{\to} ((1-\theta)(S))(\bar{F})$. Donc son image dans $Q = H^{1,0}(\mathbb{A}_F/F; S_{sc} \stackrel{1-\theta}{\to} (1-\theta)(S))$ est nulle. Cela prouve que l'image de $\mathbf{q}_\infty$ est contenue dans le noyau de $\mathbf{q}_0$.

Démontrons la réciproque. Considérons des éléments $q_j \in Q_j$, pour $j = 1, 2, 3$, tels que $\mathbf{q}_0(q_1, q_2, q_3) = 0$. On relève q_1 en une cochaîne $\dot{\beta} : \Gamma_F \to \bar{S}_{sc}(\mathbb{A}_{\bar{F}})$ telle que $\partial\dot{\beta}$ prend ses valeurs dans $\bar{S}_{sc}(\bar{F})$. On a noté ∂ la différentielle. D'après le lemme 6.3, l'application $G(\mathbb{A}_F) \to H^0_{ab}(\mathbb{A}_F; G)/Im(H^0_{ab}(F; G)) = Q_2$ est surjective. On relève q_2 en un élément

$g=(g_v)_{v\in Val(F)}$ de $G(\mathbb{A}_F)$. On sait que l'application naturelle $\underline{K}^V\to H^0_{ab}(\mathfrak{o}^V;G_\sharp)=Q_3$ est surjective. On relève q_3 en un élément $k^V=\prod_{v\not\in V}k_v\in\underline{K}^V$. Pour unifier les notations, on pose $k_v=1$ pour $v\in V$. Fixons un ensemble fini V'' de places de F contenant V et tel que, pour $v\not\in V''$, le tore $S_{\star,v}$ soit non ramifié et g_v appartienne à K_v. Pour $v\not\in V''$, on sait que K_v et $S_{\star,v}(\mathfrak{o}_v)$ ont même image dans $H^0_{ab}(F_v;G)$, cf. 1.5(2). Puisque seule compte l'image de g_v dans ce groupe, on peut supposer $g_v\in S_{\star,v}(\mathfrak{o}_v)$ pour $v\not\in V$. Pour la même raison, on peut supposer $k_v\in S_{\star,v}(\mathfrak{o}_v^{nr})$ pour $v\not\in V''$. Pour $v\in V'$, on choisit des éléments $g_{sc,v},k_{sc,v}\in G_{SC}(\bar{F}_v)$ et $a_v,b_v\in Z(G;\bar{F}_v)$ de sorte que $g_v=a_v\pi(g_{sc,v})$, $k_v=b_v\pi(k_{sc,v})$. On suppose $b_v=1$ et $k_{sc,v}=1$ pour $v\in V$. Pour $v\not\in V''$, on pose $g_{sc,v}=1$, $k_{sc,v}=1$ et $a_v=g_v$, $b_v=k_v$. Pour tout v, a_v et b_v sont des éléments de $S_{\star,v}(\bar{F}_v)$. Pour tout v et tout $\sigma\in\Gamma_{F_v}$, on pose $\gamma_v(\sigma)=g_{sc,v}\sigma(g_{sc,v})^{-1}$ et $\kappa_v(\sigma)=k_{sc,v}\sigma(k_{sc,v})^{-1}$. Ce sont des cocycles à valeurs dans $Z(G_{SC};\bar{F}_v)$ et ils sont triviaux si $v\not\in V''$. Le couple (γ_v,a_v) est l'image naturelle de g_v dans $H^{1,0}(F_v;S_{\star,sc,v}\to S_{\star,v})\simeq H^0_{ab}(F_v;G)$. On note $\dot{a}_v$ l'image de a_v dans $S(\bar{F}_v)$ par l'isomorphisme $ad_{\bar{r}_\star^{-1}u_\star}$. Alors $(\gamma_v,\dot{a}_v)$ est l'image naturelle de g_v dans $H^{1,0}(F_v;S_{sc}\to S)\simeq H^0_{ab}(F_v;G)$. Avec des notations similaires, $(\kappa_v,\dot{b}_v)$ est l'image naturelle de k_v dans $H^{1,0}(F_v;S_{sc}\to S/Z(G)^\theta)\simeq H^0_{ab}(F_v;G_\sharp)$. Nos cocycles s'étendent en des cocycles adéliques γ et κ et nos termes a_v, $\dot{a}_v$ etc... se regroupent en des termes adéliques a, $\dot{a}$ etc...

La condition $\mathbf{q}_0(q_1,q_2,q_3)=0$ signifie que la cochaîne $(\bar{\pi}_{\star,sc}(\dot{\beta})\kappa\gamma,(1-\theta)(\dot{b}\dot{a}))$, à valeurs dans le complexe $S_{sc}(\mathbb{A}_{\bar{F}})\stackrel{1-\theta}{\to}(1-\theta)(S(\mathbb{A}_{\bar{F}}))$, est cohomologue à une cochaîne à valeurs dans le complexe $S_{sc}(\bar{F})\stackrel{1-\theta}{\to}(1-\theta)(S(\bar{F}))$. On peut donc fixer $\dot{x}\in S_{sc}(\mathbb{A}_{\bar{F}})$ de sorte que

$(1-\theta)(\dot{b}\dot{a}\pi(\dot{x})^{-1})\in(1-\theta)(S(\bar{F}))$

et que, en posant $\delta(\sigma)=\dot{x}\sigma(\dot{x})^{-1}\bar{\pi}_{\star,sc}(\dot{\beta}(\sigma))\kappa(\sigma)\gamma(\sigma)$, on ait

(4) pour tout $\sigma\in\Gamma_F$, $\delta(\sigma)\in S_{sc}(\bar{F})$.

On peut écrire $(1-\theta)(\dot{b}\dot{a}\pi(\dot{x})^{-1})=(1-\theta)(z'\pi(\dot{x}'))$, avec $z'\in Z(G;\bar{F})$ et $\dot{x}'\in S_{sc}(\bar{F})$. On peut remplacer $\dot{x}$ par $\dot{x}\dot{x}'$. Cela ne perturbe pas la relation (4). Mais la relation précédente devient

$(1-\theta)(\dot{b}\dot{a}\pi(\dot{x})^{-1})=(1-\theta)(z')$, avec $z'\in Z(G;\bar{F})$.

Parce que $\dot{\beta}$ prend ses valeurs dans $\bar{S}_{sc}$, $\bar{\pi}_{\star,sc}(\dot{\beta})$ prend ses valeurs dans S^θ_{sc}. De plus, les couples $(\gamma,(1-\theta)(\dot{a}))$ et $(\kappa,(1-\theta)(\dot{b}))$ sont des cocycles. Cela permet de calculer

(5) $(1-\theta)\circ\pi(\delta(\sigma))=(1-\theta)(\sigma(z')(z')^{-1})$ pour tout $\sigma\in\Gamma_F$.

A fortiori $(1-\theta)\circ\pi(\delta(\sigma))\in Z(G;\bar{F})$. Cela entraîne $\delta(\sigma)\in S^\theta_{sc}(\bar{F})Z(G_{SC};\bar{F})$. Rappellons que l'on note $I_{\star,sc}$ l'image réciproque dans G_{SC} de l'image de $I_\star$ dans G_{AD}. Le groupe $S^\theta_{sc}(\bar{F})Z(G_{SC};\bar{F})$ est le produit de $Z(I_{\star,sc};\bar{F})$ et de $\bar{\pi}_{\star,sc}(\bar{S}_{sc}(\bar{F}))$. Seule compte pour nous l'image de $\dot{\beta}$ dans $H^1(\mathbb{A}_F/F;\bar{S}_{sc})$. On peut modifier $\dot{\beta}$ par une cochaîne à valeurs dans $\bar{S}_{sc}(\bar{F})$. Par une telle modification, on peut donc supposer

(6) $\delta(\sigma)\in Z(I_{\star,sc};\bar{F})$ pour tout $\sigma\in\Gamma_F$.

Transportons par $ad_{u_\star^{-1}\bar{r}_\star}$ la cochaîne $\dot{\beta}$ en une cochaîne β à valeurs dans $\bar{S}_{\star,sc}(\mathbb{A}_{\bar{F}})$. Transportons de même $\dot{x}$ en un élément $x\in S_{\star,sc}(\mathbb{A}_{\bar{F}})$. Puisque l'isomorphisme $ad_{u_\star^{-1}\bar{r}_\star}$ est équivariant pour les actions galoisiennes et est l'identité sur $Z(I_{\star,sc})$, nos relations se conservent. C'est-à-dire que l'on a

(7) $\delta(\sigma)=x\sigma(x)^{-1}\bar{\pi}_{\star,sc}(\beta(\sigma))\kappa(\sigma)\gamma(\sigma)$ pour tout $\sigma\in\Gamma_F$;

(8) $(1-\theta)(ba\pi(x)^{-1})=(1-\theta)(z')$.

D'après (6), $\partial\delta$ prend ses valeurs dans $Z(I_{\star,sc};\bar{F})$. Mais $\partial\delta=\bar{\pi}_{\star,sc}(\partial\beta)$. Donc $\partial\beta$ prend ses valeurs dans $Z(\bar{G}_{\star,SC};\bar{F})$. Alors β se pousse en un cocycle à valeurs dans $\bar{G}_{\star,SC}(\mathbb{A}_{\bar{F}})/Z(\bar{G}_{\star,SC};\bar{F})$. Parce que $\bar{G}_{\star,SC}$ est simplement connexe, le théorème 2.2 de

[K2] dit que l'application

$$H^1(\Gamma_F;\bar{G}_{\star,SC}(\bar{F})/Z(\bar{G}_{\star,SC};\bar{F}))\to H^1(\Gamma_F;\bar{G}_{\star,SC}(\mathbb{A}_{\bar{F}})/Z(\bar{G}_{\star,SC};\bar{F}))$$

est surjective. On peut donc fixer $\bar{m}\in\bar{G}_{\star,SC}(\mathbb{A}_{\bar{F}})$ tel que, en posant $\bar{\alpha}(\sigma)=\bar{m}\beta(\sigma)^{-1}\sigma(\bar{m})^{-1}$, on ait $\bar{\alpha}(\sigma)\in\bar{G}_{\star,SC}(\bar{F})$ pour tout $\sigma\in\Gamma_F$. Posons $m=\bar{\pi}_{\star,sc}(\bar{m})$ et $\alpha(\sigma)=\bar{\pi}_{\star,sc}(\bar{\alpha}(\sigma))$. En utilisant (7), on obtient

$$\alpha(\sigma)=m\delta(\sigma)^{-1}x\sigma(x)^{-1}\kappa(\sigma)\gamma(\sigma)\sigma(m)^{-1}.$$

Mais $\delta(\sigma)\in Z(I_{\star,sc})$ commute à m et à $\alpha(\sigma)$. D'où

$$(9)\qquad \alpha(\sigma)\delta(\sigma)=mx\sigma(x)^{-1}\kappa(\sigma)\gamma(\sigma)\sigma(m)^{-1}.$$

La cochaîne $\alpha\delta$ prend ses valeurs dans $G_{SC}(\bar{F})$. C'est un cocycle car le terme de droite ci-dessus en est un. Montrons que

(10) ce cocycle est localement trivial.

On peut fixer une extension finie E de F telle que tous nos éléments et toutes nos cochaînes prennent leurs valeurs dans $\mathbb{A}_E$. Soit $v\in Val(F)$. Comme d'habitude, on note $\bar{v}$ le prolongement fixé de v à $\bar{F}$ et w sa restriction à E. Les termes x et m ont des composantes locales x_w et m_w. Pour simplifier, on les note x_v et m_v. Ces notations seront utilisées dans la suite de la preuve. Pour $\sigma\in\Gamma_{F_v}$, on a $\gamma_v(\sigma)=g_{sc,v}\sigma(g_{sc,v})^{-1}$ et $\kappa_v(\sigma)=k_{sc,v}\sigma(k_{sc,v})^{-1}$, ces deux éléments appartenant à $Z(G_{SC})$ et valant 1 si $v\not\in V''$. On en déduit que la composante dans E_w de $\alpha(\sigma)\delta(\sigma)$ est égale à $m_vx_vk_{sc,v}g_{sc,v}\sigma(m_vx_vk_{sc,v}g_{sc,v})^{-1}$. Ce cocycle est un cobord, d'où l'assertion (10).

Parce que G_{SC} est simplement connexe, l'application

$$H^1(F;G_{SC})\to H^1(\mathbb{A}_F;G_{SC})$$

est injective ([Lab2] théorème 1.6.9). Il en résulte que l'image de $\alpha\delta$ dans $H^1(F;G_{SC})$ est triviale. On peut donc fixer $Y_{sc}\in G_{SC}$ tel que $\alpha(\sigma)\delta(\sigma)=Y_{sc}\sigma(Y_{sc})^{-1}$ pour tout $\sigma\in\Gamma_F$. Le calcul de locale trivialité que l'on vient de faire implique que, pour toute place v, il existe $h_{sc,v}\in G_{SC}(F_v)$ tel que

$$(11)\qquad Y_{sc}=m_vx_vk_{sc,v}g_{sc,v}h_{sc,v}.$$

Posons $Y=z'\pi(Y_{sc})$. Montrons que

(12) Y appartient à $\mathcal{Y}_\star[d_V]$.

Pour $\sigma\in\Gamma_F$, on a $Y\sigma(Y)^{-1}=\pi(\alpha(\sigma)\delta(\sigma))z'\sigma(z')^{-1}$. On a $\pi(\alpha(\sigma))\in\bar{G}_\star(\bar{F})\subset I_\star(\bar{F})$. On a $\delta(\sigma)\in Z(I_{\star,sc};\bar{F})$ donc $\pi(\delta(\sigma))\in Z(I_\star;\bar{F})Z(G;\bar{F})$ et aussi $\pi(\delta(\sigma))z'\sigma(z')^{-1}\in Z(I_\star;\bar{F})Z(G;\bar{F})$. La relation (5) entraîne que cet élément est invariant par θ. Donc il appartient à $Z(I_\star;\bar{F})Z(G;\bar{F})^\theta$ qui est inclus dans $Z(I_\star;\bar{F})$. Donc $Y\sigma(Y)^{-1}\in I_\star(\bar{F})$. Cela prouve que $Y\in\mathcal{Y}_\star$. Soit $v\in Val(F)$. La relation (8) entraîne qu'il existe $\xi_v\in S_{\star,v}(\bar{F}_v)^\theta$ tel que

(13) $z'=\xi_v\pi(x_v)^{-1}b_va_v$.

Utilisons (11). Puisque z' est central, on a

$$Y=\pi(Y_{sc})z'=\pi(m_vx_v)z'\pi(k_{sc,v}g_{sc,v}h_{sc,v})=\pi(m_v)\xi_vb_va_v\pi(k_{sc,v}g_{sc,v}h_{sc,v}).$$

Par construction, on a $a_v\in Z(G;\bar{F}_v)$ si $v\in V''$ et $k_{sc,v}=1$ si $v\not\in V''$. En tout cas, a_v et $k_{sc,v}$ commutent. L'égalité précédente se récrit

$$(14)\qquad Y=\pi(m_v)\xi_vb_v\pi(k_{sc,v})a_v\pi(g_{sc,v})\pi(h_{sc,v})=\pi(m_v)\xi_vk_vg_v\pi(h_{sc,v}).$$

Cette égalité décompose Y en le produit d'un élément de $I_\star(\bar{F}_v)$, à savoir $\pi(m_v)\xi_v$, d'un élément k_v égal à 1 si $v \in V$ et qui appartient à $\underline{K}_v$ si $v \notin V$, et d'un élément de $G(F_v)$, à savoir $g_v\pi(h_{sc,v})$. C'est exactement la condition pour que Y appartienne à $\mathcal{Y}_\star[d_V]$. Cela prouve (12).

Fixons $j \in I(\bar{F})$ et $g' \in G(F)$ tels que l'élément $y = jYg'$ appartienne à notre ensemble de représentants $\dot{\mathcal{Y}}_\star[d_V]$. Pour $\sigma \in \Gamma_F$, posons $u(\sigma) = y\sigma(y)^{-1}$. Alors u est un cocycle de Γ_F dans $Z(I_\star)$ qui appartient à $\mathbb{U}$ (lemme 7.5). Pour achever la preuve du lemme, il suffit de prouver que l'image de (q_1, q_2, q_3) dans Q_∞ est égale à $\mathbf{q}_\infty(u)$. Reprenons la construction de $\mathbf{q}_\infty(u)$ de 7.6. On dispose déjà de l'élément $y \in G(\bar{F})$ tel que $u(\sigma) = y\sigma(y)^{-1}$ pour tout $\sigma \in \Gamma_F$. On doit fixer pour toute place v des éléments $i_v \in I(\bar{F}_v)$ et k'_v avec $k'_v = 1$ si $v \in V$ et $k'_v \in \underline{K}_{\sharp,v}$ si $v \notin V$, de sorte que $u(\sigma) = i_v k'_v \sigma(i_v k'_v)^{-1}$ pour tout $\sigma \in \Gamma_{F_v}$. L'égalité (14) montre que l'on peut choisir $i_v = j\pi(m_v)\xi_v$ et $k'_v = k_v$. Ces éléments vérifient la relation 7.6(1) pour presque tout v. C'est clair pour k_v puisque $k_v \in S_{\star,v}(\mathfrak{o}_v^{nr})$ pour $v \notin V''$. Grâce à (13), on a $i_v = jz'\pi(m_v x_v)b_v^{-1}a_v^{-1}$. Les termes b_v et a_v appartiennent à K_v^{nr} pour $v \notin V'$. Les termes j et z' sont définis sur $\bar{F}$, donc appartiennent à K_v^{nr} pour presque tout v. Les termes m_v et x_v sont les composantes en w de termes adéliques donc vérifient la même condition. On peut donc utiliser ces termes i_v et k_v dans la construction de 7.6.

L'élément u_3 construit dans ce paragraphe est trivialement égal à q_3.

Avant de calculer u_1, on a besoin d'un résultat préliminaire. On fixe une décomposition $j = \bar{\pi}_\star(j_{sc})\zeta_j$ avec $j_{sc} \in \bar{G}_{\star,SC}(\bar{F})$ et $\zeta_j \in Z(I_\star; \bar{F})$. Introduisons le cocycle $\psi : \Gamma_F \to \bar{G}_{\star,SC}(\mathbb{A}_{\bar{F}})$ défini par $\psi(\sigma) = (j_{sc}\bar{m})^{-1}\sigma(j_{sc}\bar{m})$. Montrons que

(15) ψ prend ses valeurs dans $\bar{S}_{\star,sc}(\mathbb{A}_{\bar{F}})$; on a $\psi(\sigma)\beta(\sigma) \in Z(\bar{G}_{\star,SC}; \bar{F})$ pour tout $\sigma \in \Gamma_F$.

On a vu dans la preuve de (12) que $Y\sigma(Y)^{-1} \in \pi(\alpha(\sigma))Z(I_\star; \bar{F})$. On a aussi $jY\sigma(jY)^{-1} = y\sigma(y)^{-1} \in Z(I_\star; \bar{F})$ par définition de y. Il en résulte que $j\pi(\alpha(\sigma))\sigma(j)^{-1} \in Z(I_\star; \bar{F})$. Il en résulte que $j_{sc}\bar{\alpha}(\sigma)\sigma(j_{sc})^{-1} \in Z(\bar{G}_{\star,SC}; \bar{F})$. En remplaçant $\bar{\alpha}(\sigma)$ par sa valeur $\bar{m}\beta(\sigma)^{-1}\sigma(\bar{m})^{-1}$ et par inversion, on obtient $\sigma(j_{sc}\bar{m})\beta(\sigma)(j_{sc}\bar{m})^{-1} \in Z(\bar{G}_{\star,SC}; \bar{F})$. On peut aussi bien conjuguer cette relation par $(j_{sc}\bar{m})^{-1}$ et on obtient la seconde assertion de (15). La première en résulte immédiatement.

L'élément u_1 est l'image dans Q_1 d'un cocycle adélique. Calculons sa composante en une place v. On note $i_{v,ad}$ l'image de i_v dans $\bar{G}_{\star,AD}$. Elle appartient à $\bar{G}_{\star,AD}(F_v)$. Alors $u_{1,v}$ est l'image de $i_{v,ad}$ par l'application

$$\bar{G}_{\star,AD}(F_v) \to H^1(\Gamma_{F_v}; Z(\bar{G}_{\star,SC})) \to H^1(F_v; \bar{S}_{sc}).$$

On fixe une décomposition $\xi_v = \bar{\pi}_\star(\xi_{sc,v})\zeta_v$ avec $\xi_{sc,v} \in \bar{S}_{\star,sc,v}(\bar{F}_v)$ et $\zeta_v \in Z(I_\star; \bar{F}_v)$. On a alors l'égalité $i_v = \bar{\pi}_\star(j_{sc}\bar{m}_w\xi_{sc,v})\zeta_j\zeta_v$. Pour $\sigma \in \Gamma_{\bar{v}}$, on a

$$u_{1,v}(\sigma) = j_{sc}\bar{m}_w\xi_{sc,v}\sigma(j_{sc}\bar{m}_w\xi_{sc,v})^{-1}.$$

Ce terme appartient à $Z(\bar{G}_{\star,SC}; \bar{F}_v)$ On peut aussi bien conjuguer le terme ci-dessus par $\sigma(\xi_{sc,v})\bar{m}_w^{-1}j_{sc}^{-1}$ et on obtient

$$u_{1,v}(\sigma) = \xi_{sc,v}\sigma(j_{sc}\bar{m}_w)^{-1}j_{sc}\bar{m}_w\sigma(\xi_{sc,v})^{-1},$$

autrement dit

$$u_{1,v}(\sigma) = \xi_{sc,v}\psi_v(\sigma)^{-1}\sigma(\xi_{sc,v})^{-1}.$$

Tous les termes appartiennent à $S_{\star,sc,v}(\bar{F}_v)$ et leur produit appartient à $Z(\bar{G}_{\star,SC}; \bar{F}_v)$. On peut aussi bien conjuguer chaque terme par $\bar{r}_\star^{-1}u_\star$. D'où

$$u_{1,v}(\sigma) = \dot{\xi}_{sc,v}\dot{\psi}_v(\sigma)^{-1}\sigma(\dot{\xi}_{sc,v})^{-1},$$

où $\dot{\xi}_{sc,v}$ et $\dot{\psi}_v(\sigma)$ sont les images de $\xi_{sc,v}$ et $\psi_v(\sigma)$ dans $\bar{S}_{sc}(\bar{F}_v)$. Cela montre que les cocycles $u_{1,v}$ et $\dot{\psi}_v^{-1}$ sont cohomologues. Il en résulte que l'image de u_1 dans Q_1 est la même que celle du cocycle $\dot{\psi}^{-1}$. En conjuguant la propriété (14) par $\bar{r}_\star^{-1}u_\star$, on voit que $\dot{\psi}^{-1}$ et $\dot{\beta}$ diffèrent par une cochaîne à valeurs dans $Z(\bar{G}_{\star,SC};\bar{F})$. Leurs images dans $Q_1 = H^1(\mathbb{A}_F/F;\bar{S}_{sc})$ sont donc égales. Puisque l'image de $\dot{\beta}$ est q_1, cela démontre que $u_1 = q_1$.

Pour calculer u_2, on doit fixer une décomposition $y = \pi(y_{sc})z$ avec $y_{sc} \in G_{SC}(\bar{F})$ et $z \in Z(G;\bar{F})$. Pour tout v, on fixe une décomposition $i_v k_v = \pi(x_{sc,v})z_v$ avec $x_{sc,v} \in G_{SC}(\bar{F}_v)$ et $z_v \in Z(G;\bar{F}_v)$. Alors u_2 est l'image du cocycle adélique à valeurs dans le complexe $S_{sc} \to S$ dont la composante en v est la suivante. Le premier terme est $\sigma \mapsto \sigma(x_{sc,v})x_{sc,v}^{-1}y_{sc}\sigma(y_{sc})^{-1}$ et le second est zz_v^{-1}. Notons que le premier terme est à valeurs centrales, il est égal à son conjugué $\sigma \mapsto x_{sc,v}^{-1}y_{sc}\sigma(x_{sc,v}^{-1}y_{sc})$. Or $y = jYg' = j\pi(m_v)\xi_v k_v g_v \pi(h_{sc,v})g' = i_v k_v g_v \pi(h_{sc,v})g'$. Il en résulte que $g_v\pi(h_{sc,v})g' = \pi(x_{sc,v}^{-1}y_{sc})zz_v^{-1}$. Donc le terme u_2 apparaît comme l'image naturelle dans Q_2 de l'élément $g\pi(h_{sc})g' \in G(\mathbb{A}_F)$. L'élément $\pi(h_{sc})$ s'envoie sur 0 dans $H^0_{ab}(\mathbb{A}_F;G)$. L'élément g' s'envoie sur un élément de $H^0_{ab}(F;G)$, qui devient nul dans Q_2. Donc u_2 est l'image naturelle de g, c'est-à-dire q_2. Cela achève la démonstration. $\square$

7.8 Un caractère de Q_∞

Dans ce paragraphe, on suppose

(1) ω et $\omega_{\mathbf{H}}$ coïncident sur $I_\star(\mathbb{A}_F)$.

Puisque $\bar{S}_{sc} \simeq S_{\bar{H}}$ est un sous-tore de $\bar{H}$, l'élément $\bar{s} \in Z(\hat{\bar{H}})^{\Gamma_F}$ est aussi un élément de $\hat{\bar{S}}_{ad}^{\Gamma_F}$. On a un produit sur

$$H^1(\mathbb{A}_F/F;\bar{S}_{sc}) \times \hat{\bar{S}}_{ad}^{\Gamma_F}.$$

Donc $\bar{s}$ définit un caractère du premier groupe, lequel n'est autre que Q_1. On le note ω_1. Relevons l'élément $\mathbf{a} \in H^1(W_F;Z(\hat{G}))/ker^1(W_F;Z(\hat{G}))$ en un cocycle encore noté $\mathbf{a}$ à valeurs dans $Z(\hat{G})$. Il se pousse en un élément de $H^{1,0}(W_F;\hat{S} \to \hat{S}_{ad})$, qui, par les dualités usuelles, définit un caractère de $H^{1,0}(\mathbb{A}_F/F;S_{sc} \to S)$. Via le plongement de Q_2 dans ce groupe, on récupère un caractère ω_2 de Q_2. On vérifie que le composé de ω_2 avec l'application naturelle $G(\mathbb{A}_F) \to Q_2$ n'est autre que ω. Puisque qu'on a déjà dit que cette application etait surjective, cela fournit une autre définition de ω_2. On note ω_3 le caractère trivial de Q_3. Notons $\omega_\times$ le caractère de $Q_\times$ dont la composante sur Q_j est ω_j pour tout $j = 1, 2, 3$. Montrons que

(2) pour $1 \leq j < j' \leq 3$, $\omega_\times$ est trivial sur l'image de $\mathbf{q}_{j,j'}$.

Preuve. Pour $j = 2$ et $j' = 3$, cela résulte de la non-ramification de ω hors de V, qui implique que ω est trivial sur K_v pour $v \notin V$. Pour $j = 1$, cela va résulter de la propriété

(3) le composé de ω_1 et de l'homomorphisme $H^0_{ab}(\mathbb{A}_F;\bar{G}_{\star,AD}) \to Q_1$ est le caractère $\omega_{\mathbf{H}}$,

que l'on prouvera ci-dessous. L'homomorphisme $Q_{1,2} \to Q_1$ se factorisant par un homomorphisme naturel $Q_{1,2} \to H^0_{ab}(\mathbb{A}_F;\bar{G}_{\star,AD})$, l'assertion (2) pour $j = 1$ et $j' = 2$ résulte, grâce à (3), de l'hypothèse que ω coïncide sur $I_\star(\mathbb{A}_F)$ avec le caractère de ce groupe déduit de $\omega_{\mathbf{H}}$. L'homomorphisme $Q_{1,3} \to Q_1$ se factorisant par un homomorphisme naturel $Q_{1,3} \to H^0_{ab}(\mathbb{A}_F;\bar{G}_{\star,AD})$, l'assertion (2) pour $j = 1$ et $j' = 3$ résulte, grâce à (3), de la non-ramification de $\omega_{\mathbf{H}}$ hors de V qui implique que $\omega_{\mathbf{H}}$ est trivial sur $K_{\star,ad,v}$ pour $v \notin V$. Cela prouve (2). $\square$

Preuve de (3). On reprend la construction de $\omega_{\mathbf{H}}$ donnée en [I] 2.7. Elle se simplifie puisqu'il n'y a pas ici de torsion. On fixe un relèvement $\bar{s}_{sc} \in \hat{\bar{T}}_{sc}$ de $\bar{s} \in \hat{\bar{T}}_{ad}$. Pour tout $w \in W_F$, on fixe $(\bar{g}(w), w) \in \hat{\mathcal{H}}$ tel que l'action galoisienne sur $\hat{\bar{H}}$ soit $w \mapsto w_{\bar{H}} = ad_{\bar{g}_w} \circ w_{\bar{G}}$. On fixe un relèvement $\bar{g}_{sc}(w) \in \hat{\bar{G}}_{SC}$ de $\bar{g}(w)$. On définit le cocycle $a_{sc}(w) = \bar{s}_{sc}\bar{g}_{sc}(w)w_{\bar{G}}(\bar{s}_{sc})^{-1}\bar{g}_{sc}(w)^{-1}$. Il est à valeurs dans $Z(\hat{\bar{G}}_{SC})$ et $\omega_{\bar{H}}$ est le caractère de $\bar{G}_{AD}(\mathbb{A}_F)$ associé à ce cocycle. Remarquons que l'on a aussi $a_{sc}(w) = \bar{s}_{sc}w_{\bar{H}}(\bar{s}_{sc})^{-1}$. On peut identifier $\hat{\bar{S}}_{sc}$ au tore $\hat{\bar{T}}_{sc}$ muni d'une action galoisienne $\sigma \mapsto \sigma_S$. Celle-ci est de la forme $\sigma_S = \omega_{S,\bar{H}}(\sigma) \circ \sigma_{\bar{H}}$, où $\omega_{S,\bar{H}}$ est un cocycle à valeurs dans $W^{\bar{H}}$. Un élément $\omega_{S,\bar{H}}(\sigma)$ se représente comme l'action adjointe d'un élément du centralisateur de $\bar{s}_{sc}$ dans $\hat{\bar{G}}_{SC}$. Il en résulte que

$$w_S(\bar{s}_{sc}) = \omega_{S,\bar{H}}(w)(w_{\bar{H}}(\bar{s}_{sc})) = \omega_{S,\bar{H}}(w)(a_{sc}(w)^{-1}\bar{s}_{sc}) = a_{sc}(w)^{-1}\bar{s}_{sc}.$$

Donc $a_{sc}(w) = \bar{s}_{sc}w_S(\bar{s}_{sc})^{-1}$. Ce cocycle est l'image naturelle de l'élément de $H^{1,0}(W_F; \hat{\bar{S}}_{sc} \to \hat{\bar{S}}_{ad})$ dont la première composante est a_{sc} et la seconde est triviale. Mais ce cocycle est cohomologue à celui dont la première composante est triviale et la seconde est $\bar{s}$. Celui-ci définit le caractère ω_1 de Q_1. L'assertion (3) résulte de cela par dualité. □

Grâce à (2), le caractère $\omega_\times$ de $Q_\times$ se quotiente en un caractère noté ω_∞ de Q_∞.

Lemme. *Si ω_∞ n'est pas trivial sur l'image de l'homomorphisme $\mathbf{q}_\infty$, alors $\bar{\varphi}[V', d_V] = 0$.*

Preuve. La fonction $\bar{\varphi}[V', d_V]$ est définie par la formule 7.1(3). Conformément aux bijections de 7.3, on la récrit en remplaçant l'ensemble de sommation $\dot{D}_F[d_V]$ et ses éléments d par $\dot{\mathcal{Y}}_\star[d_V]$ et ses éléments y. L'hypothèse (1) posée ci-dessus permet de simplifier la formule 7.1(3). La preuve du lemme 7.4 montre en effet que, sous cette hypothèse (1), on a l'égalité $\omega(uh[y])\bar{f}[y, u] = \omega(h[y])\bar{f}[y, 1]$ pour tout $y \in \dot{\mathcal{Y}}_\star[d_V]$ et tout $u \in \mathcal{U}[V', y]$. Posons simplement $\bar{f}[y] = \bar{f}[y, 1]$. On a donc

$$(4) \qquad \bar{\varphi}[V', d_V] = \sum_{y \in \dot{\mathcal{Y}}_\star[d_V]} \omega(h[y])\bar{f}[y].$$

Soit $y \in \dot{\mathcal{Y}}_\star[d_V]$, notons $u_y : \Gamma_F \to Z(I_\star; \bar{F})$ le cocycle défini par $u_y(\sigma) = y\sigma(y)^{-1}$. On note encore u_y son image dans $H^1(F; I_\star)$. C'est un élément de $\mathbb{U}$ (lemme 7.5). On va prouver

$$(5) \qquad \omega(h[y])\bar{f}[y] = \omega_\infty \circ \mathbf{q}_\infty(u_y)^{-1}\omega(h_\star)\bar{f}_\star,$$

où on rappelle que $h_\star = h[1]$ et $\bar{f}_\star = \bar{f}[1]$. En admettant ce résultat, et en utilisant le lemme 7.5, la formule (4) se récrit

$$\bar{\varphi}[V', d_V] = \omega(h_\star)\bar{f}_\star \sum_{u \in \mathbb{U}} \omega_\infty \circ \mathbf{q}_\infty(u)^{-1}.$$

Le lemme en résulte.

Il s'agit donc de prouver (5). On considère y comme ci-dessus. Soit $\mathbf{x} \in \bar{H}(F_V)$ un élément en position générale et proche de 1. Par définition,

$$S^{\bar{H}}(\mathbf{x}, \bar{f}[y]) = \sum_x \Delta_V[y](\mathbf{x}, x) I^{G_{\eta[y],SC}}(x, f[y]_{sc}).$$

Ici, x parcourt, modulo conjugaison par $G_{\eta[y],SC}(F_V)$, l'ensemble des éléments de ce groupe qui correspondent à $\mathbf{x}$. Le facteur $\Delta_V[y]$ est le facteur de transfert canonique associé aux choix de sous-groupes compacts hyperspéciaux $K_{sc,v}[y]$ de $G_{\eta[y],SC}(F_v)$ pour $v \notin V$. On rappelle que $K_{sc,v}[y]$ est l'image réciproque de $K_v[y] = ad_{h_v[y]}(K_v) \cap G_{\eta[y]}(F_v)$. Enfin, on a rappelé dans la preuve du lemme 7.4 la construction de la fonction $f[y]_{sc}$. D'après 7.3(1), ad_y est un isomorphisme défini sur F de $G_{\eta[y]}$ sur $\bar{G}_\star = G_{\eta_\star}$. Il se relève en un tel isomorphisme de $G_{\eta[y],SC}$ sur $\bar{G}_{\star,SC}$ que l'on note encore ad_y. Cet isomorphisme envoie l'ensemble des éléments de $G_{\eta[y],SC}(F_V)$ qui correspondent à $\mathbf{x}$ sur l'ensemble des éléments de $\bar{G}_{\star,SC}(F_V)$ qui correspondent à $\mathbf{x}$. Notons $\mathcal{X}(\mathbf{x})$ ce dernier ensemble. Définissons presque partout sur $\bar{H}(F_V) \times \bar{G}_{\star,SC}(F_V)$ une fonction $\Delta'_V[y]$ par $\Delta'_V[y](\mathbf{x}', x') = \Delta_V[y](\mathbf{x}', ad_{y^{-1}}(x'))$. C'est le facteur de transfert associé aux sous-groupes compacts hyperspéciaux $ad_y(K_{sc,v}[y])$ de $\bar{G}_{\star,SC}(F_v)$ pour $v \notin V$. Par simple transport de structure, on obtient

$$(6) \qquad S^{\bar{H}}(\mathbf{x}, \bar{f}[y]) = \sum_{x \in \mathcal{X}(\mathbf{x})} \Delta'_V[y](\mathbf{x}, x) I^{\bar{G}_{\star,SC}}(x, f[y]_{sc} \circ ad_{y^{-1}}).$$

Pour toute place v, on fixe des éléments i_v et k_v associés à u_y comme en 7.6. En particulier, on a $u_y(\sigma) = i_v k_v \sigma(i_v k_v)^{-1}$ pour tout $\sigma \in \Gamma_{F_v}$. Cela implique qu'il existe un unique $g_v \in G(F_v)$ tel que $y = i_v k_v g_v$. Pour $v \notin V$, les éléments $h_v[y]$ et $h_{\star,v} = h_v[1]$ de $G(F_v)$ ont été fixés tels que $ad_{h_{\star,v}^{-1}}(\eta_\star) \in \tilde{K}_v$ et $ad_{h_v[y]^{-1}}(\eta[y]) \in \tilde{K}_v$. On a

$$ad_{h_v[y]^{-1}}(\eta[y]) \in \tilde{K}_v \iff ad_{h_v[y]^{-1}y^{-1}}(\eta_\star) \in \tilde{K}_v \iff ad_{h_v[y]^{-1}g_v^{-1}k_v^{-1}i_v^{-1}}(\eta_\star) \in \tilde{K}_v.$$

Puisque $ad_{i_v^{-1}}(\eta_\star) = \eta_\star$, ces relations sont encore équivalentes à $ad_{h_v[y]^{-1}g_v^{-1}k_v^{-1}}(\eta_\star) \in \tilde{K}_v$. Posons $g'_v = ad_{k_v}(g_v h_v[y])$. On sait que $g'_v \in G(F_v)$. La relation précédente équivaut à $ad_{k_v^{-1}(g'_v)^{-1}}(\eta_\star) \in \tilde{K}_v$, ou encore $ad_{(g'_v)^{-1}}(\eta_\star) \in \tilde{K}_v$ puisque ad_{k_v} conserve cet ensemble. On a encore l'équivalence

$$ad_{(g'_v)^{-1}}(\eta_\star) \in \tilde{K}_v \iff ad_{(g'_v)^{-1}h_{\star,v}}(ad_{h_{\star,v}^{-1}}(\eta_\star)) \in \tilde{K}_v.$$

Ainsi qu'on l'a déjà fait plusieurs fois, on peut appliquer à $ad_{h_{\star,v}^{-1}}(\eta_\star)$ le lemme 5.6(ii) de [W1]. Il implique $h_{\star,v}^{-1}g'_v \in G_{ad_{h_{\star,v}^{-1}}(\eta_\star)}(F_v)K_v$. On peut donc fixer $m_v \in \bar{G}_\star(F_v)$ et $k'_v \in K_v$ de sorte que $h_{\star,v}^{-1}g'_v = ad_{h_{\star,v}^{-1}}(m_v)k'_v$. Cela équivaut à $k_v g_v h_v[y] = m_v h_{\star,v} k'_v k_v$. Le groupe $ad_y(K_{sc,v}[y])$ est l'image réciproque dans $\bar{G}_{\star,SC}(F_v)$ de $ad_{yh_v[y]}(K_v) \cap \bar{G}_\star(F_v)$. On a

$$ad_{yh_v[y]}(K_v) = ad_{i_v k_v g_v h_v[y]}(K_v) = ad_{i_v m_v h_{\star,v} k'_v k_v}(K_v) = ad_{i_v m_v h_{\star,v}}(K_v),$$

puisque $ad_{k'_v k_v}$ conserve K_v. Notons $K_{\star,v} = ad_{h_{\star,v}}(K_v) \cap \bar{G}_\star(F_v)$ et $K_{\star,sc,v}$ son image réciproque dans $\bar{G}_{\star,SC}(F_v)$. On obtient l'égalité $ad_{yh_v[y]}(K_v) \cap \bar{G}_\star(F_v) = ad_{i_v m_v}(K_{\star,v})$. L'automorphisme $ad_{i_v m_v}$ de $\bar{G}_\star$ se relève en un automorphisme de $\bar{G}_{\star,SC}$ noté de la même façon. D'où l'égalité

$$(7) \qquad ad_y(K_{sc,v}[y]) = ad_{i_v m_v}(K_{\star,sc,v}).$$

On note $\Delta_{\star,V} = \Delta_V[1]$. Rappelons que c'est le facteur de transfert sur $\bar{H}(F_V) \times \bar{G}_{\star,SC}(F_V)$ associé aux choix de compacts $K_{\star,sc,v}$ pour $v \notin V$. A l'aide de la formule (7), le même calcul que dans la preuve du lemme 7.4 conduit à l'égalité

$$\Delta'_V[y] = \Delta_{\star,V} \prod_{v \notin V} \omega_{\bar{H}}(i_{v,ad} m_{v,ad})^{-1},$$

où $i_{v,ad}$ et $m_{v,ad}$ sont les images de i_v et m_v dans $\bar{G}_{F,AD}(F_v)$. Soit $v\not\in V$. D'après l'hypothèse (1), on a $\omega_{\bar{H}}(m_{v,ad})=\omega(m_v)$. Par définition, on a

$$m_v=ad_{k_v}(g_vh_v[y])(k'_v)^{-1}h_{\star,v}^{-1}.$$

Le caractère ω est non ramifié en v, donc trivial sur K_v. On a déjà remarqué qu'il était invariant par conjugaison par un élément de $G_\sharp(F_v)$. Il en résulte que $\omega(m_v)=\omega(g_vh_v[y]h_{\star,v}^{-1})$. On rappelle que $h[y]=(h_v[y])_{v\not\in V}$ et que de même $h_\star=(h_{\star,v})_{v\not\in V}$. La formule plus haut se récrit

$$\Delta'_V[y]=\omega(h_\star)\omega(h[y])^{-1}\Delta_{\star,V}\prod_{v\not\in V}\omega_{\bar{H}}(i_{v,ad})^{-1}\omega(g_v)^{-1}.$$

La formule (6) se récrit

$$(8)\qquad S^{\bar{H}}(\mathbf{x},\bar{f}[y])=\omega(h_\star)\omega(h[y])^{-1}\left(\prod_{v\not\in V}\omega_{\bar{H}}(i_{v,ad})^{-1}\omega(g_v)^{-1}\right)$$

$$\sum_{x\in\mathcal{X}(\mathbf{x})}\Delta_{\star,V}(\mathbf{x},x)I^{\bar{G}_{\star,SC}}(x,f[y]_{sc}\circ ad_{y^{-1}}).$$

La fonction $f[y]_{sc}\circ ad_{y^{-1}}$ est l'image par $\iota_{\bar{G}_{\star,SC},\bar{G}_\star}$ de $f[y]\circ ad_{y^{-1}}$. Pour un élément $x\in\bar{G}_\star(F_V)$ en position générale et proche de 1, on a

$$I^{\bar{G}_\star}(x,\omega,f[y]\circ ad_{y^{-1}})=I^{G_{\eta[y]}}(ad_{y^{-1}}(x),\omega,f[y])$$

$$=I^{\tilde{G}}(ad_{y^{-1}}(x)\eta[y],\omega,f)=I^{\tilde{G}}(ad_{y^{-1}}(x\eta_\star),\omega,f).$$

Le terme $ad_{y^{-1}}(x\eta_\star)$ est un élément de $\tilde{G}(F_V)$. On rappelle que $k_v=1$ pour $v\in V$. On a donc précisément $ad_{y^{-1}}(x\eta_\star)=ad_{g_V^{-1}i_V^{-1}}(x\eta_\star)$ où, par exemple, $g_V=(g_v)_{v\in V}$. On a

$$I^{\tilde{G}}(ad_{g_V^{-1}i_V^{-1}}(x\eta_\star),\omega,f)=\omega(g_V)^{-1}I^{\tilde{G}}(ad_{i_V^{-1}}(x\eta_\star),\omega,f)$$

$$=\omega(g_V)^{-1}I^{\tilde{G}}(ad_{i_V^{-1}}(x)\eta_\star,\omega,f)=\omega(g_V^{-1})I^{\bar{G}_\star}(ad_{i_V^{-1}}(x),\omega,f_\star),$$

où on rappelle que $f_\star=desc_{\eta_\star}^{\tilde{G}}(f)$. L'automorphisme ad_{i_V} de $\bar{G}_\star$ est défini sur F_V et conserve le caractère $\omega_{\bar{H}}$ de $\bar{G}_\star(F_V)$, lequel est égal à ω. Il en résulte que

$$I^{\bar{G}_\star}(ad_{i_V^{-1}}(x),\omega,f_\star)=I^{\bar{G}_\star}(x,\omega,f_\star\circ ad_{i_V^{-1}}).$$

En rassemblant ces calculs, on obtient l'égalité $f[y]\circ ad_{y^{-1}}=\omega(g_V^{-1})f_\star\circ ad_{i_V^{-1}}$. D'où aussi $f[y]_{sc}\circ ad_{y^{-1}}=\omega(g_V^{-1})f_{\star,sc}\circ ad_{i_{V,ad}^{-1}}$ où $i_{V,ad}$ est l'image de i_V dans $\bar{G}_{\star,AD}(F_V)$. Pour $x\in\mathcal{X}(\mathbf{x})$, on a

$$I^{\bar{G}_{\star,SC}}(x,f[y]_{sc}\circ ad_{y^{-1}})=\omega(g_V^{-1})I^{\bar{G}_{\star,SC}}(x,f_{\star,sc}\circ ad_{i_{V,ad}^{-1}})=\omega(g_V^{-1})I^{\bar{G}_{\star,SC}}(ad_{i_{V,ad}^{-1}}(x),f_{\star,sc}).$$

L'automorphisme $ad_{i_{V,ad}}$ conserve $\mathcal{X}(\mathbf{x})$. Par changement de variables, l'égalité (8) se récrit

$$S^{\bar{H}}(\mathbf{x},\bar{f}[y])=\omega(h_\star)\omega(h[y])^{-1}\omega(g)^{-1}\sum_{x\in\mathcal{X}(\mathbf{x})}\Delta_{\star,V}(\mathbf{x},ad_{i_{V,ad}}(x))I^{\bar{G}_{\star,SC}}(x,f_{\star,sc})\prod_{v\not\in V}\omega_{\bar{H}}(i_{v,ad})^{-1},$$

où $g=(g_v)_{v\in Val(F)}$. Mais on a l'égalité $\Delta_{\star,V}(\mathbf{x},ad_{i_{V,ad}}(x))=\omega_{\bar{H}}(i_{V,ad}^{-1})\Delta_{\star,V}(\mathbf{x},x)$, cf. [I] 2.7. D'où

$$S^{\bar{H}}(\mathbf{x},\bar{f}[y])=\omega(h_\star)\omega(h[y])^{-1}\omega(g)^{-1}\omega_{\bar{H}}(i_{ad})^{-1}\sum_{x\in\mathcal{X}(\mathbf{x})}\Delta_{\star,V}(\mathbf{x},x)I^{\tilde{G}_{\star,SC}}(x,f_{\star,sc}),$$

où $i=(i_v)_{v\in Val(F)}$. La somme du membre de droite n'est autre que $S^{\bar{H}}(\mathbf{x},\bar{f}_\star)$. D'où l'égalité

$$\bar{f}[y]=\omega(h_\star)\omega(h[y])^{-1}\omega(g)^{-1}\omega_{\bar{H}}(i_{ad})^{-1}\bar{f}_\star.$$

En reprenant les définitions, on voit que $\omega(g)\omega_{\bar{H}}(i_{ad})=\omega_\infty\circ\mathbf{q}_\infty(u_y)$. L'égalité (5) s'en déduit, ce qui achève la démonstration. $\square$

7.9 Preuve de la proposition 7.1

On suppose $D_F[d_V]$ non vide car sinon la proposition 7.1 est triviale, ainsi qu'on l'a dit en 7.3. On utilise les constructions de 7.3. On suppose que l'ensemble de places V' satisfait les conditions 7.1(2) et 7.4(2). Supposons $\bar{\varphi}[V',d_V]\neq 0$. D'après le lemme 7.4, ω et $\omega_{\bar{H}}$ coïncident sur $I_\star(\mathbb{A}_F)$, c'est-à-dire que l'hypothèse (1) de 7.8 est vérifiée. Le lemme de ce paragraphe implique que ω_∞ est trivial sur l'image de $\mathbf{q}_\infty$. Puisque cette image est le noyau de $\mathbf{q}_0$, cf. lemme 7.7, ω_∞ se quotiente en un caractère de l'image de $\mathbf{q}_0$. Cette image est le groupe Q_0 de 6.6. C'est un sous-groupe ouvert, fermé et d'indice fini de Q, cf. lemme 6.6. On vérifie aisément que le caractère ainsi défini de Q_0 est continu. Il se prolonge donc en un caractère ω_Q de Q. D'après 6.5(1), ce caractère s'identifie à un élément $p\in P$. Par construction, on a

- le composé de ω_Q et de l'homomorphisme $\mathbf{q}_1:Q_1\to Q$ est le caractère de Q_1 associé à l'élément $\bar{s}\in\hat{\bar{S}}_{ad}^{\Gamma_F}$;

- le composé de ω_Q et de l'homomorphisme $G_{ab}(\mathbb{A}_F)\to Q_2\stackrel{\mathbf{q}_2}{\to}Q$ est le caractère ω ;

- le composé de ω_Q et de l'homomorphisme $\mathbf{q}_3:Q_3\to Q$ est trivial.

Les mêmes calculs qu'en 6.5 montrent que ces propriétés sont respectivement équivalentes à

- $\mathbf{p}_1(p)=\bar{s}$;

- $\mathbf{p}_2(p)=\mathbf{a}$;

- pour tout $v\notin V$, $res_{I_v}(p)$ appartient à l'image de φ_v.

Autrement dit, $p\in P(\mathbf{H})$. Donc cet ensemble n'est pas vide. Alors $\mathcal{J}(\mathbf{H})$ ne l'est pas non plus d'après la proposition 6.4. Cela prouve la proposition 7.1. $\square$

7.10 Calcul d'une constante

On a fixé une fois pour toutes une mesure sur $\mathfrak{A}_{\tilde{G}}$. En 5.8, on a défini le réseau $\mathfrak{A}_{\tilde{G},\mathbb{Z}}=Hom(X^*(G)^{\Gamma_F,\theta},\mathbb{Z})\subset\mathfrak{A}_{\tilde{G}}$ et on a noté $covol(\mathfrak{A}_{\tilde{G},\mathbb{Z}})$ le volume du quotient $\mathfrak{A}_{\tilde{G}}/\mathfrak{A}_{\tilde{G},\mathbb{Z}}$. La donnée $\mathcal{X}$ est elliptique, cf. 5.1(2). Pour tout $d\in D_F[d_V]$, l'élément $\eta[d]$ est donc elliptique (cf. fin de 1.2). Il en résulte que $\mathfrak{A}_{G_{\eta[d]}}=\mathfrak{A}_{\tilde{G}}$. On définit dans cet espace le réseau $\mathfrak{A}_{G_{\eta[d]},\mathbb{Z}}=Hom(X^*(G_{\eta[d]})^{\Gamma_F},\mathbb{Z})$ et on note $covol(\mathfrak{A}_{G_{\eta[d]},\mathbb{Z}})$ le volume du quotient $\mathfrak{A}_{\tilde{G}}/\mathfrak{A}_{G_{\eta[d]},\mathbb{Z}}$.

Proposition. *Supposons $D_F[d_V]$ non vide. Alors, pour tout $d\in D_F[d_V]$, on a l'égalité*

$$|P^0||\dot{D}_F[d_V]|^{-1}=C(\tilde{G})^{-1}\tau(G_{\eta[d]})[I_{\eta[d]}(F):G_{\eta[d]}(F)]^{-1}[I_{\eta[d]}(F_V):G_{\eta[d]}(F_V)]covol(\mathfrak{A}_{G_{\eta[d]},\mathbb{Z}})^{-1}.$$

On renvoie à 5.8 pour la définition de $C(\tilde{G})$. La preuve occupe les paragraphes 7.11 à 7.15.

7.11 Calcul de $|P^0|$

Labesse définit des groupes de cohomologie abélienne de $I_\star\backslash G$, cf. [Lab1] 3.3. Considérons comme en 7.3 un sous-tore maximal $\bar{T}_\star$ de $I_\star$ défini sur F, notons $T_\star$ son commutant dans G et introduisons les images réciproques $\bar{T}_{\star,sc}$ de $\bar{T}_\star$ dans $\bar{G}_{\star,SC}$ et $T_{\star,sc}$ de $T_\star$ dans G_{SC}. On a un complexe de tores

$$\bar{T}_{\star,sc} \to T_\star \times T_{\star,sc} \to (1-\theta)(T_\star) \times T_\star.$$

En notant $\bar{\pi}_\star : \bar{G}_{\star,SC} \to G$, $\bar{\pi}_{\star,sc} : \bar{G}_{\star,SC} \to G_{SC}$ et $\pi : G_{SC} \to G$ les homomorphismes naturels, les flèches sont

$$x \mapsto (\bar{\pi}_\star(x), -\bar{\pi}_{\star,sc}(x))$$

pour la première et

$$(y,z) \mapsto ((1-\theta)(y), y+\pi(z))$$

pour la seconde. On pose

$$H^0_{ab}(F; I_\star\backslash G) = H^{2,1,0}(F; \bar{T}_{\star,sc} \to T_\star \times T_{\star,sc} \to (1-\theta)(T_\star) \times T_\star).$$

On définit de même $H^0_{ab}(\mathbb{A}_F; I_\star\backslash G)$, $H^0_{ab}(\mathbb{A}_F/F; I_\star\backslash G)$ et $H^0_{ab}(F_v; I_\star\backslash G)$ pour $v \in Val(F)$. Pour $v \notin V$, on peut choisir $T_\star$ non ramifié en v et on pose

$$H^0_{ab}(\mathfrak{o}_v; I_\star\backslash G) = H^{2,1,0}(\mathfrak{o}_v; \bar{T}_{\star,sc} \to T_\star \times T_{\star,sc} \to (1-\theta)(T_\star) \times T_\star).$$

On pose aussi $H^0_{ab}(\mathfrak{o}^V; I_\star\backslash G) = \prod_{v\notin V} H^0_{ab}(\mathfrak{o}_v; I_\star\backslash G)$. Des notations analogues seront utilisées dans la suite. Ces définitions ne dépendent pas du choix de $\bar{T}_\star$, à isomorphismes canoniques près.

Les isomorphismes

$$\begin{array}{ccc} T_\star \times T_{\star,sc} & \to & T_\star \times T_{\star,sc} \\ (y,z) & \mapsto & (y+\pi(z), -z) \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccc} (1-\theta)(T_\star) \times T_\star & \to & T_\star \times (1-\theta)(T_\star) \\ (y',z') & \mapsto & (z', y'-(1-\theta)(z')) \end{array}$$

fournissent un isomorphisme entre le complexe (1) et la somme des deux complexes

$$(2) \qquad \bar{T}_{\star,sc} \stackrel{\bar{\pi}_{\star,sc}}{\to} T_{\star,sc} \stackrel{1-\theta}{\to} (1-\theta)(T_\star)$$

et $T_\star \stackrel{id}{\to} T_\star$. Puisque le deuxième complexe est cohomologiquement trivial, la cohomologie de $I_\star\backslash G$ peut se définir à l'aide du complexe (2). Comme en 6.2, on voit que l'on peut remplacer le complexe (2) par

$$(3) \qquad \bar{S}_{sc} \stackrel{\bar{\pi}_{\star,sc}}{\to} S_{sc} \stackrel{1-\theta}{\to} (1-\theta)(S).$$

En effet, les deux complexes sont quasi-isomorphes au complexe

$$Z(\bar{G}_{\star,SC}) \stackrel{\bar{\pi}_{\star,sc}}{\to} Z(I_{\star,sc}) \stackrel{1-\theta}{\to} (1-\theta)(Z(G)).$$

On a une suite exacte

$$H^0_{ab}(F;G) \to H^0_{ab}(F;I_\star\backslash G) \to H^1_{ab}(F;I_\star) \to H^1_{ab}(F;G).$$

Labesse définit $\mathfrak{E}(I_\star,G;F)$ comme le conoyau de la première flèche, ou encore le noyau de la troisième. Cf. [Lab1] 3.3. On définit de même $\mathfrak{E}(I_\star,G;\mathbb{A}_F)$, $\mathfrak{E}(I_\star,G;F_v)$ pour $v \in Val(F)$ et $\mathfrak{E}(I_\star,G;\mathfrak{o}_v)$ pour $v \notin V$.

Attention. Labesse définit par contre $\mathfrak{E}(I_\star,G;\mathbb{A}_F/F)$ comme le conoyau de l'homomorphisme composé

$$H^0_{ab}(\mathbb{A}_F;G) \to H^0_{ab}(\mathbb{A}_F/F,G) \to H^0_{ab}(\mathbb{A}_F/F;I_\star\backslash G).$$

On a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
H^0_{ab}(\mathfrak{o}^V;G) & \to & H^0_{ab}(\mathfrak{o}^V;I_\star\backslash G) & \to & \mathfrak{E}(I_\star,G;\mathfrak{o}^V) & \to & 1\\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
H^0_{ab}(\mathbb{A}_F;G) & \to & H^0_{ab}(\mathbb{A}_F;I_\star\backslash G) & \to & \mathfrak{E}(I_\star,G;\mathbb{A}_F) & \to & 1\\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
H^0_{ab}(\mathbb{A}_F;G) & \to & H^0_{ab}(\mathbb{A}_F/F;I_\star\backslash G) & \to & \mathfrak{E}(I_\star,G;\mathbb{A}_F/F) & \to & 1
\end{array}$$

dont les suites horizontales sont exactes. Notons $e^V : \mathfrak{E}(I_\star,G;\mathfrak{o}^V) \to \mathfrak{E}(I_\star,G;\mathbb{A}_F/F)$ le composé des deux dernières flèches verticales.

Lemme. *On a l'égalité* $|P^0| = |\mathfrak{E}(I_\star,G;\mathbb{A}_F/F)/Im(e^V)|$.

Preuve. Comme on l'a dit ci-dessus, on peut utiliser le complexe (3) pour calculer la cohomologie abélienne de $I_\star\backslash G$. Il s'en déduit une suite exacte de cohomologie

$$H^1(\mathbb{A}_F/F;\bar{S}_{sc}) \to H^{1,0}(\mathbb{A}_F/F;S_{sc} \stackrel{1-\theta}{\to} (1-\theta)(S)) \stackrel{\iota}{\to} H^0_{ab}(\mathbb{A}_F/F;I_\star\backslash G) \to H^2(\mathbb{A}_F/F;\bar{S}_{sc}).$$

On se rappelle que $\bar{S}_{sc} \simeq \bar{S}_{\bar{H}}$ est un sous-tore elliptique de $\bar{H}$ et que $\mathbf{H}$ est une donnée endoscopique elliptique de $\bar{G}_{\star,SC}$. Il en résulte que $\bar{S}_{sc}$ est elliptique, donc $H^2(\mathbb{A}_F/F;\bar{S}_{sc}) = 0$ d'après les isomorphismes de Tate-Nakayama ([K3] 3.4.2.1). Avec les notations des paragraphes précédents, la suite exacte ci-dessus se récrit

$$Q_1 \stackrel{\mathbf{q}_1}{\to} Q \stackrel{\iota}{\to} H^0_{ab}(\mathbb{A}_F/F;I_\star\backslash G) \to 0$$

On voit facilement que l'homomorphisme naturel

$$(4) \qquad H^0_{ab}(\mathbb{A}_F;G) \to H^0_{ab}(\mathbb{A}_F/F;I_\star\backslash G)$$

est le composé de l'homomorphisme naturel du groupe de départ dans Q_2 et de $\iota \circ \mathbf{q}_2$. Notons Q' le quotient de Q par le sous-groupe engendré par $\mathbf{q}_1(Q_1)$ et $\mathbf{q}_2(Q_2)$. On obtient que ι se quotiente en un isomorphisme entre Q' et le conoyau de (4), c'est-à-dire $\mathfrak{E}(I_\star,G;\mathbb{A}_F/F)$. Montrons que

(5) cet isomorphisme envoie l'image dans Q' de $\mathbf{q}_3(Q_3)$ sur $Im(e^V)$.

Du diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
 & & S_{sc} & \to & S/Z(G)^\theta\\
 & & \| & & \downarrow 1-\theta\\
\bar{S}_{sc} & \stackrel{\bar{\pi}_{\star,sc}}{\to} & S_{sc} & \stackrel{1-\theta}{\to} & (1-\theta)(S)
\end{array}$$

de complexes de tores se déduit un homomorphisme

$$H^0_{ab}(\mathbb{A}_F; G_\sharp) \to H^0_{ab}(\mathbb{A}_F; I_\star\backslash G).$$

Il se restreint en un homomorphisme

$$(6) \qquad H^0_{ab}(\mathfrak{o}^V; G_\sharp) \to H^0_{ab}(\mathfrak{o}^V; I_\star\backslash G).$$

On obtient un diagramme

$$\begin{array}{ccc}
H^0_{ab}(\mathfrak{o}^V; G_\sharp) & \to & H^0_{ab}(\mathfrak{o}^V; I_\star\backslash G) \\
\downarrow & & \downarrow \\
H^0_{ab}(\mathbb{A}_F; G_\sharp) & \to & H^0_{ab}(\mathbb{A}_F; I_\star\backslash G) \\
\downarrow & & \downarrow \\
H^{1,0}(\mathbb{A}_F; S_{sc} \stackrel{1-\theta}{\to} (1-\theta)(S)) & \to & H^0_{ab}(\mathbb{A}_F; I_\star\backslash G) \\
\downarrow & & \downarrow \\
H^{1,0}(\mathbb{A}_F/F; S_{sc} \stackrel{1-\theta}{\to} (1-\theta)(S)) & \to & H^0_{ab}(\mathbb{A}_F/F; I_\star\backslash G) \\
\downarrow & & \downarrow \\
Q' & \stackrel{\iota}{\to} & \mathfrak{E}(I_\star, G; \mathbb{A}_F/F)
\end{array}$$

Il est clair que ce diagramme est commutatif. Par définition, l'image de $\mathbf{q}_3(Q_3)$ dans Q' est l'image de la suite verticale de gauche tandis que $Im(e^V)$ est l'image de celle de droite. Pour prouver (5), il suffit donc de prouver que l'homomorphisme (6) est surjectif. On peut aussi bien fixer $v \notin V$ et démontrer que l'analogue local de (6) est surjectif. Comme on l'a dit, on peut remplacer le tore S et ses divers avatars S_{sc} etc... par un tore $T_\star$ et ses avatars $T_{\star,sc}$ etc... comme au début du paragraphe et on peut supposer que ce tore est non ramifié en v. L'analogue local de (6) se factorise en

$$(7) \qquad H^0_{ab}(\mathfrak{o}_v; G_\sharp) = H^{1,0}(\mathfrak{o}_v; T_{\star,sc} \to T_\star/Z(G)^0) \to H^{1,0}(\mathfrak{o}_v; T_{\star,sc} \stackrel{1-\theta}{\to} (1-\theta)(T_\star))$$

$$\to H^{1,0}(\mathfrak{o}_v; \bar{T}_{\star,sc} \to T_{\star,sc} \stackrel{1-\theta}{\to} (1-\theta)(T_\star)) = H^0_{ab}(\mathfrak{o}_v; I_\star\backslash G).$$

La deuxième flèche est surjective car son conoyau s'envoie injectivement dans $H^2(\mathfrak{o}_v; \bar{T}_{\star,sc})$ qui est nul ([KS] lemme C.1.A). L'homomorphisme entre complexes de tores donnant naissance à la première flèche se complète en une suite exacte de complexes de tores

$$\begin{array}{ccc}
 & & 1 \\
 & & \downarrow \\
1 & \to & T_\star^\theta/Z(G)^\theta \\
\downarrow & & \downarrow \\
T_{\star,sc} & \to & T_\star/Z(G)^0 \\
\downarrow & & \downarrow 1-\theta \\
T_{\star,sc} & \stackrel{1-\theta}{\to} & (1-\theta)(T_\star)) \\
\downarrow & & \downarrow \\
1 & & 1
\end{array}$$

Le conoyau de la première flèche de (7) s'envoie donc injectivement dans $H^1(\mathfrak{o}_v; T_\star^\theta/Z(G)^\theta)$ qui est nul car $T_\star^\theta/Z(G)^\theta$ est connexe ([KS] lemme C.1.A). Cette flèche est donc surjective. La surjectivité des deux flèches de (7) entraîne l'assertion cherchée. Cela prouve (5).

Cette assertion prouve que le nombre d'éléments de $\mathfrak{E}(I_\star, G; \mathbb{A}_F/F)/Im(e^V)$ est égal à celui du quotient de Q par le sous-groupe engendré par les $\mathbf{q}_j(Q_j)$ pour $j = 1, 2, 3$. Ce sous-groupe n'est autre que Q_0. Mais le lemme 6.6 dit que P^0 et Q/Q_0 sont des groupes (finis) duaux. D'où l'égalité

$$|P^0| = |Q/Q_0|.$$

Le lemme en résulte. $\square$

7.12 Un premier calcul de $|P^0||\mathbb{U}|^{-1}$

On définit usuellement le nombre de Tamagawa $\tau(G)$ de G, qui est calculé par la formule rappelée en 3.2. Labesse étend la définition aux groupes quasi-connexes (Lab1] 1.2). On dispose donc du nombre de Tamagawa $\tau(I_\star)$ de $I_\star$. Labesse définit aussi le groupe $D(I_\star, G)$ comme le conoyau de l'homomorphisme

$$H^1_{ab}(\mathbb{A}_F/F; I_\star) \to H^1_{ab}(\mathbb{A}_F/F; G).$$

C'est un groupe fini dont on note $d(I_\star, G)$ le nombre d'éléments.

Lemme. *On a l'égalité*

$$|P^0||\mathbb{U}|^{-1} = \tau(I_\star)\tau(G)^{-1}d(I_\star, G)|(I_\star/\bar{G}_\star)(F_V)|.$$

Preuve. Soit $v \in Val(F)$. On peut calculer le groupe $H^1_{ab}(F_v; I_\star)$ à l'aide du complexe

$$\bar{S}_{sc} \to S \overset{1-\theta}{\to} (1-\theta)(S).$$

Celui-ci est équivalent au complexe

$$\bar{S}_{sc} \to S^\theta$$

Ici, le groupe S^θ n'est plus un tore mais c'est un groupe diagonalisable. En utilisant ce complexe, on a un homomorphisme naturel

$$H^1_{ab}(F_v; I_\star) \to H^1_{ab}(F_v; S^\theta/S^{\theta,0}).$$

Ces deux groupes sont finis. Labesse les munit en [Lab1] 2.3 de mesures. On s'aperçoit en utilisant sa définition que la mesure d'un point est la même dans chacun des groupes (deuxième suite exacte de la page 417 de loc. cit.). Dans le deuxième groupe, la mesure d'un point est $|(S^\theta/S^{\theta,0})(F_v)|^{-1}$. L'homomorphisme naturel $S^\theta/S^{\theta,0} \to I_\star/\bar{G}_\star$ est un isomorphisme. La mesure d'un point dans $H^1_{ab}(F_v; I_\star)$ est donc $|(I_\star/\bar{G}_\star)(F_v)|^{-1}$. Par définition, $\mathfrak{E}(I_\star, G; F_v)$ est un sous-groupe de $H^1(F_v; I_\star)$. On le munit de la mesure induite. La mesure d'un point est donc la même que précédemment.

Supposons $v \notin V$. L'homomorphisme $\mathfrak{E}(I_\star, G; \mathfrak{o}_v) \to \mathfrak{E}(I_\star, G; F_v)$ est injectif. En effet, les deux groupes se plongent respectivement dans $H^1_{ab}(\mathfrak{o}_v; I_\star)$ et $H^1_{ab}(F_v; I_\star)$ et l'homomorphisme $H^1_{ab}(\mathfrak{o}_v; I_\star) \to H^1_{ab}(F_v; I_\star)$ est injectif. Identifions $\mathfrak{E}(I_\star, G; \mathfrak{o}_v)$ à un sous-groupe de $\mathfrak{E}(I_\star, G; F_v)$. Montrons que

(1) $mes(\mathfrak{E}(I_\star, G; \mathfrak{o}_v)) = 1$.

D'après la définition de la mesure, cela équivaut à

$$(2) \qquad |\mathfrak{E}(I_\star, G; \mathfrak{o}_v)| = |(I_\star/\bar{G}_\star)(F_v)|.$$

On utilise ici la définition de $\mathfrak{E}(I_\star, G; \mathfrak{o}_v)$ comme conoyau de

$$H^0_{ab}(\mathfrak{o}_v; G) \to H^0_{ab}(\mathfrak{o}_v; I_\star \backslash G).$$

On fixe un tore $\bar{T}_\star$ comme en 7.11, non ramifié en v. L'homomorphisme ci-dessus devient

$$H^{1,0}_{ab}(\mathfrak{o}_v; T_{\star,sc} \to T_\star) \to H^{2,1,0}_{ab}(\mathfrak{o}_v; \bar{T}_{\star,sc} \to T_{\star,sc} \stackrel{1-\theta}{\to} (1-\theta)(T_\star)).$$

On a une suite de cohomologie

$$H^1_{ab}(\mathfrak{o}_v; \bar{T}_{\star,sc}) \to H^{1,0}_{ab}(\mathfrak{o}_v; T_{\star,sc} \stackrel{1-\theta}{\to} (1-\theta)(T_\star))$$

$$\to H^{2,1,0}_{ab}(\mathfrak{o}_v; \bar{T}_{\star,sc} \to T_{\star,sc} \stackrel{1-\theta}{\to} (1-\theta)(T_\star)) \to H^2_{ab}(\mathfrak{o}_v; \bar{T}_{\star,sc}).$$

Les deux groupes extrêmes sont nuls. Donc la flèche centrale est un isomorphisme et $\mathfrak{E}(I_\star, G; \mathfrak{o}_v)$ devient le conoyau de l'homomorphisme

$$H^{1,0}_{ab}(\mathfrak{o}_v; T_{\star,sc} \to T_\star) \to H^{1,0}_{ab}(\mathfrak{o}_v; T_{\star,sc} \stackrel{1-\theta}{\to} (1-\theta)(T_\star)).$$

Ces deux groupes se calculent comme respectivement $T_\star(\mathfrak{o}_v)/\pi(T_{\star,sc}(\mathfrak{o}_v))$ et $((1-\theta)(T_\star))(\mathfrak{o}_v)/(1-\theta)\circ\pi(T_{\star,sc}(\mathfrak{o}_v))$, cf. [KS] lemme C.1.A. Donc $\mathfrak{E}(I_\star, G; \mathfrak{o}_v)$ s'identifie au conoyau de

$$T_\star(\mathfrak{o}_v) \stackrel{1-\theta}{\to} ((1-\theta)(T_\star))(\mathfrak{o}_v).$$

De la suite exacte

$$1 \to T^\theta_\star(\mathfrak{o}^{nr}_v) \to T_\star(\mathfrak{o}^{nr}_v) \to ((1-\theta)(T_\star))(\mathfrak{o}^{nr}_v) \to 1$$

(où $T^\theta_\star(\mathfrak{o}^{nr}_v) = T^\theta_\star \cap T_\star(\mathfrak{o}^{nr}_v)$) et de la nullité des H^1 pour les groupes connexes résulte que le conoyau ci-dessus s'identifie à $H^1(\Gamma^{nr}_v; T^\theta_\star(\mathfrak{o}^{nr}_v))$. On note ce groupe $H^1(\mathfrak{o}_v; T^\theta_\star)$. On a une suite exacte

$$H^1(\mathfrak{o}_v; T^{\theta,0}_\star) \to H^1(\mathfrak{o}_v; T^\theta_\star) \to H^1(\mathfrak{o}_v; T^\theta_\star/T^{\theta,0}_\star) \to H^2(\mathfrak{o}_v; T^{\theta,0}_\star),$$

avec une définition évidente du troisième groupe. Les deux groupes extrêmes sont nuls. Donc la flèche centrale est un isomorphisme. Le groupe $T^\theta_\star(\mathfrak{o}^{nr}_v)/T^{\theta,0}_\star(\mathfrak{o}^{nr}_v)$ est fini. Le lemme 5.5 de [W1] implique qu'il est isomorphe à $T^\theta_\star(\bar{F}_v)/T^{\theta,0}_\star(\bar{F}_v)$, lequel est isomorphe à $I_\star(\bar{F}_v)/\bar{G}_\star(\bar{F}_v)$. Il résulte de ces deux faits que les groupes suivants on même nombre d'éléments : $H^1(\mathfrak{o}_v; T^\theta_\star/T^{\theta,0}_\star)$, $H^0(\mathfrak{o}_v; T^\theta_\star/T^{\theta,0}_\star)$, $H^0(F_v; T^\theta_\star/T^{\theta,0}_\star)$, $H^0(F_v; I_\star/\bar{G}_\star)$. En rassemblant ces égalités, on obtient (2), d'où (1).

On a une suite exacte

$$(3) \qquad 1 \to B_{ab}(I_\star, G) \to \mathfrak{E}(I_\star, G; F) \to \mathfrak{E}(I_\star, G; \mathbb{A}_F) \to \mathfrak{E}(I_\star, G; \mathbb{A}_F/F)$$

(première suite de la page 427 de [Lab1]). On n'aura pas besoin de connaître le groupe $B_{ab}(I_\star, G)$, disons seulement qu'il est fini. Le conoyau de la dernière flèche est fini. Les deux derniers groupes sont munis de topologies. La dernière flèche envoie $\mathfrak{E}(I_\star, G; \mathbb{A}_F)$ sur un sous-groupe ouvert de $\mathfrak{E}(I_\star, G; \mathbb{A}_F/F)$ et ce dernier groupe est compact. Le produit sur $v \in Val(F)$ des mesures locales définies ci-dessus donne une mesure sur $\mathfrak{E}(I_\star, G; \mathbb{A}_F)$.

On munit les deux premiers groupes de la suite (1) de la mesure de comptage et le dernier de la mesure compatible avec cette suite et les mesures définies sur les autres groupes. En utilisant cette mesure, on peut récrire le lemme 7.11 sous la forme

$$(4) \qquad |P^0| = mes(\mathfrak{E}(I_\star, G; \mathbb{A}_F/F))/mes(Im(e^V)).$$

Rappelons que e^V est le composé de la suite

$$\mathfrak{E}(I_\star, G; \mathfrak{o}^V) \to \mathfrak{E}(I_\star, G; \mathbb{A}_F) \to \mathfrak{E}(I_\star, G; \mathbb{A}_F/F)$$

On a vu ci-dessus que la première flèche était injective. On s'en sert pour identifier $\mathfrak{E}(I_\star, G; \mathfrak{o}^V)$ à un sous-groupe de $\mathfrak{E}(I_\star, G; \mathbb{A}_F)$. Notons $\mathbb{U}_{ab}$ l'image réciproque de $\mathfrak{E}(I_\star, G; \mathfrak{o}^V)$ dans $\mathfrak{E}(I_\star, G; F)$ par l'homomorphisme de la suite (3). Il résulte des définitions des mesures que

$$(5) \qquad mes(Im(e^V)) = mes(\mathfrak{E}(I_\star, G; \mathfrak{o}^V))|\mathbb{U}_{ab}|^{-1}|B_{ab}(I_\star, G)|.$$

Vu comme sous-groupe de $\mathfrak{E}(I_\star, G; \mathbb{A}_F)$, $\mathfrak{E}(I_\star, G; \mathfrak{o}^V)$ est le produit sur toutes les places $v \in Val(F)$ du sous-groupe $\{0\}$ si $v \in V$, du sous-groupe $\mathfrak{E}(I_\star, G; \mathfrak{o}_v)$ de $\mathfrak{E}(I_\star, G; F_v)$ si $v \notin V$. Sa mesure est le produit des mesures de ces sous-groupes. Puisque la mesure d'un point dans $\mathfrak{E}(I_\star, G; F_v)$ est $|(I_\star/\bar{G}_\star)(F_v)|^{-1}$, (1) entraîne

$$(6) \qquad mes(\mathfrak{E}(I_\star, G; \mathfrak{o}^V)) = (\prod_{v \in V} |(I_\star/\bar{G}_\star)(F_v)|^{-1}).$$

Notons $ker^1(F; G)$ le noyau de l'application $H^1(F; G) \to H^1(\mathbb{A}_F; G)$. On définit de même $ker^1(F; I_\star)$. On a une application naturelle $ker^1(F; I_\star) \to ker^1(F; G)$. On note $B(I_\star, G)$ son noyau (c'est-à-dire, puisqu'il ne s'agit pas de groupes, l'ensemble des éléments de $ker^1(F; I_\star)$ qui deviennent triviaux dans $H^1(F; G)$). Rappelons que $\mathbb{U}$ est un sous-ensemble de $H^1(F; I_\star)$ et que $\mathbb{U}_{ab}$ est un sous-ensemble de $\mathfrak{E}(I_\star, G; F)$, lequel est un sous-ensemble de $H^1_{ab}(F; I_\star)$. Montrons que

(7) l'application naturelle $H^1(F; I_\star) \to H^1_{ab}(F; I_\star)$ se restreint en une application surjective $\mathbb{U} \to \mathbb{U}_{ab}$ dont toutes les fibres ont même nombre d'éléments ;

(8) l'image réciproque de $B_{ab}(I_\star, G)$ par cette application est $B(I_\star, G)$.

Par définition, $\mathbb{U}_{ab}$ est l'ensemble des $u_{ab} \in H^1_{ab}(F; I_\star)$ tels que

(9) l'image de u_{ab} dans $H^1_{ab}(F; G)$ est nulle ;

(10) l'image de u_{ab} dans $H^1_{ab}(\mathbb{A}_F^V; I_\star)$ appartient à $H^1_{ab}(\mathfrak{o}^V; I_\star)$;

(11) l'image de u_{ab} dans $H^1_{ab}(F_V; I_\star)$ est nulle.

On se rappelle l'application

$$H^1(F; I_\star) \to H^1_{ab}(F; I_\star) \times_{H^1_{ab}(\mathbb{A}_F; I_\star)} H^1(\mathbb{A}_F; I_\star)$$

de 7.5(1). Pour $v \notin V$, l'application $H^1(F_v; I_\star) \to H^1_{ab}(F_v; I_\star)$ est bijective ([Lab2] proposition 1.6.7). L'application ci-dessus s'identifie donc à

$$(12) \qquad H^1(F; I_\star) \to H^1_{ab}(F; I_\star) \times_{H^1_{ab}(F_V; I_\star)} H^1(F_V; I_\star).$$

Notons $\mathbf{1}$ l'élément trivial de $H^1(F_V; I_\star)$. La condition (11) équivaut à ce que $(u_{ab}, \mathbf{1})$ appartienne au produit fibré ci-dessus. En particulier, $\mathbb{U}_{ab} \times \{\mathbf{1}\}$ est un sous-ensemble de ce produit fibré. Notons $u \mapsto (u_{ab}, \mathbf{u})$ l'application (12). Un élément $u \in H^1(F; I_\star)$ appartient à $\mathbb{U}$ si et seulement s'il vérifie les conditions (2), (3) et (4) de 7.5. La condition

(3) équivaut à l'égalité $\mathbf{u} = \mathbf{1}$. Les conditions (2) et (4) équivalent aux conditions (9) et (10) ci-dessus. Jointes au fait que $(u_{ab}, \mathbf{u})$ appartient au produit fibré de droite de la relation (12), cela équivaut comme on vient de le dire à la relation $u_{ab} \in \mathbb{U}_{ab}$. Ainsi $\mathbb{U}$ est exactement l'image réciproque de $\mathbb{U}_{ab} \times \mathbf{1}$ par l'application (12). Puisque cette application est surjective ([Lab2] théorème 1.6.10), cela démontre les premières assertions de (7). Cela démontre aussi que les fibres de l'application $\mathbb{U} \to \mathbb{U}_{ab}$ sont des fibres de l'application (12). Notons $K(I_\star)$ le noyau de cette application. Soit $u \in H^1(F; I_\star)$. On voit que la fibre de (12) au-dessus de l'image de u est isomorphe à $K(I_{\star,u})$, où $I_{\star,u}$ est la forme intérieure de $I_\star$ associée au cocycle u_{ad}. Il n'est pas difficile de prouver en général que $K(I_{\star,u})$ a même nombre d'éléments que $K(I_\star)$. Dans notre cas, on s'intéresse aux éléments $u \in \mathbb{U}$ et l'assertion est triviale puisque, d'après 7.3(1) et le lemme 7.5, on a $I_{\star,u} \simeq I_\star$ pour tout $u \in \mathbb{U}$. Cela achève de prouver (7).

D'après (3), $B_{ab}(I_\star, G)$ est l'ensemble des éléments de $\mathbb{U}_{ab}$ d'image nulle dans $H^1_{ab}(\mathbb{A}_F; I_\star)$. Donc son image réciproque dans $\mathbb{U}$ est $\mathbb{U} \cap ker^1(F; I_\star)$. On a vu en 7.5(12) que l'image dans $H^1(F; G)$ d'un élément de $\mathbb{U}$ était nulle. Donc $\mathbb{U} \cap ker^1(F; I_\star) \subset B(I_\star, G)$. Inversement, un élément de $B(I_\star, G)$ est d'image nulle dans $H^1(\mathbb{A}_F; I_\star)$, a fortiori d'image nulle dans $H^1_{ab}(\mathbb{A}_F; I_\star)$. Il vérifie donc les conditions (3) et (4) de 7.5. Il est aussi d'image nulle dans $H^1(F; G)$. Il vérifie donc aussi la condition (2) de 7.5, d'après 7.5(12). Donc il appartient à $\mathbb{U}$. Il appartient aussi à $ker^1(F; I_\star)$, donc $B(I_\star, G) \subset \mathbb{U} \cap ker^1(F; I_\star)$. Finalement, ces deux ensembles sont égaux, ce qui achève la preuve de (8).

On déduit de (7) et (8) l'égalité

$$(13) \qquad |\mathbb{U}_{ab}|^{-1} |B_{ab}(I_\star, G)| = |\mathbb{U}|^{-1} |B(I_\star, G)|.$$

D'après la proposition 3.7 de [Lab1], on a

$$(14) \qquad mes(\mathfrak{E}(I_\star, G; \mathbb{A}_F/F) = \tau(I_\star)|B(I_\star, G)| d(I_\star, G) \tau(G)^{-1}.$$

En mettant bout-à-bout les égalités (4), (5), (6), (13) et (14), on obtient le lemme. □

7.13 Comparaison de deux mesures de Tamagawa

Pour tout groupe algébrique H défini sur F, on note $X^*(H)$ le groupe de caractères algébriques de H. On a un homomorphisme naturel de restriction $X^*(I_\star) \to X^*(\bar{G}_\star)$ dont les noyau et conoyau sont finis. On a donc aussi un homomorphisme

$$(1) \qquad X^*(I_\star)^{\Gamma_F} \to X^*(\bar{G}_\star)^{\Gamma_F}$$

qui a les mêmes propriétés. Notons $x(I_\star)$ le quotient du nombre d'éléments de son noyau par le nombre d'éléments de son conoyau.

Lemme. *On a l'égalité*

$$\tau(I_\star) = \tau(\bar{G}_\star) x(I_\star) [I_\star(F) : \bar{G}_\star(F)]^{-1} [I_\star(F_V) : \bar{G}_\star(F_V)] |(I_\star/\bar{G}_\star)(F_V)|^{-1}.$$

Preuve. On a rappelé en 4.1 la définition de la mesure de Tamagawa sur $\bar{G}_\star(\mathbb{A}_F)$. Elle est de la forme $dx = \ell_{\bar{G}_\star}^{-1} \otimes_{v \in Val(F)} dx_v$, où $\ell_{\bar{G}_\star}$ est le terme principal du développement en $s = 1$ d'une certaine fonction L et où, pour toute place v, dx_v est une certaine mesure sur $\bar{G}_\star(F_v)$. Une définition analogue vaut pour le groupe quasi-connexe $I_\star$. La mesure de Tamagawa sur $I_\star(\mathbb{A}_F)$ est de la forme $di = \ell_{I_\star}^{-1} \otimes_{v\in Val(F)} di_v$, avec des notations évidentes. En inspectant la définition de [Lab1] 1.2, on s'aperçoit que

- on a $\ell_{I_\star} = \ell_{\bar{G}_\star}$;

- pour tout $v \in Val(F)$, la restriction de di_v à l'ouvert $\bar{G}_\star(F_v)$ de $I_\star(F_v)$ est égale à $|(I_\star/\bar{G}_\star)(F_v)|^{-1}dx_v$.

Pour définir les nombres de Tamagawa, on a aussi besoin de mesures sur le groupe $\mathfrak{A}_{\bar{G}_\star}$. Ce groupe s'identifie naturellement à $Hom(X^*(\bar{G}_\star)^{\Gamma_F},\mathbb{R})$, ou encore à $Hom(X^*(I_\star)^{\Gamma_F},\mathbb{R})$. On définit les réseaux $\mathfrak{A}_{\bar{G}_\star,\mathbb{Z}} = Hom(X^*(\bar{G}_\star)^{\Gamma_F},\mathbb{Z})$ et $\mathfrak{A}_{I_\star,\mathbb{Z}} = Hom(X^*(I_\star)^{\Gamma_F},\mathbb{Z})$. On note $da_{\bar{G}_\star}$ la mesure de Haar sur $\mathfrak{A}_{\bar{G}_\star}$ telle que $\mathfrak{A}_{\bar{G}_\star,\mathbb{Z}}$ soit de covolume 1. Selon [Lab1] 1.2, on note $da_{I_\star}$ la mesure de Haar sur $\mathfrak{A}_{\bar{G}_\star}$ telle que $\mathfrak{A}_{I_\star,\mathbb{Z}}$ soit de covolume $|X^*(I_\star/\bar{G}_\star)^{\Gamma_F}|^{-1}$. Alors $\tau(\bar{G}_\star)$ est la mesure de $\bar{G}_\star(F)\backslash\bar{G}_\star(\mathbb{A}_F)/\mathfrak{A}_{\bar{G}_\star}$, $\bar{G}_\star(\mathbb{A}_F)$ et $\mathfrak{A}_{\bar{G}_\star}$ étant munis des mesures dx et $da_{\bar{G}_\star}$. Et $\tau(I_\star)$ est la mesure de $I_\star(F)\backslash I_\star(\mathbb{A}_F)/\mathfrak{A}_{\bar{G}_\star}$, $I_\star(\mathbb{A}_F)$ et $\mathfrak{A}_{\bar{G}_\star}$ étant munis des mesures di et $da_{I_\star}$. Le réseau $\mathfrak{A}_{\bar{G}_\star,\mathbb{Z}}$ est contenu dans $\mathfrak{A}_{I_\star,\mathbb{Z}}$ et l'indice de ce sous-groupe est égal au nombre d'éléments du conoyau de l'homomorphisme (1). Le groupe $X^*(I_\star/\bar{G}_\star)^{\Gamma_F}$ est le noyau cet homomorphisme. Il en résulte que $da_{I_\star} = x(I_\star)^{-1}da_{\bar{G}_\star}$. On peut donc utiliser l'unique mesure $da_{\bar{G}_\star}$ sur $\mathfrak{A}_{\bar{G}_\star}$ et définir $\tau(I_\star)$ comme le produit de $x(I_\star)$ et de la mesure de $I_\star(F)\backslash I_\star(\mathbb{A}_F)/\mathfrak{A}_{\bar{G}_\star}$, $I_\star(\mathbb{A}_F)$ et $\mathfrak{A}_{\bar{G}_\star}$ étant munis des mesures di et $da_{\bar{G}_\star}$.

Pour $v \notin V$, on a défini le groupe hyperspécial $K_{\star,v} = ad_{h_{\star,v}}(K_v) \cap \bar{G}_\star(F_v)$. Posons $K_{I_\star,v} = ad_{h_{\star,v}}(K_v) \cap I_\star(F_v)$. Montrons que

(2) pour toute place $v \notin V$, l'application $K_{I_\star,v} \to (I_\star/\bar{G}_\star)(F_v)$ est surjective ; les groupes $(I_\star/\bar{G}_\star)(F_v)$, $K_{I_\star,v}/K_{\star,v}$ et $I_\star(F_v)/\bar{G}_\star(F_v)$ sont isomorphes.

On peut fixer une paire de Borel définie sur F_v de $\bar{G}_\star$ dont est issu le sous-groupe hyperspécial $K_{\star,v}$. On note son tore $\bar{T}_0$. Notons T_0 son commutant dans G. On a alors $I_\star/\bar{G}_\star \simeq T_0^\theta/T_0^{\theta,0}$. On a déjà dit que, pour un tel tore, on a $T_0^\theta(\bar{F}_v)/T_0^{\theta,0}(\bar{F}_v) = T_0^\theta(\mathfrak{o}_v^{nr})/T_0^{\theta,0}(\mathfrak{o}_v^{nr})$. Parce que $H^1(\mathfrak{o}_v;T_0^{\theta,0}) = 0$, l'homomorphisme

$$T_0^\theta(\mathfrak{o}_v) \to H^0(\mathfrak{o}_v;T_0^\theta/T_0^{\theta,0}) = (T_0^\theta/T_0^{\theta,0})(F_v) = (I_\star/\bar{G}_\star)(F_v)$$

est surjectif. Par ailleurs, le lemme 5.5 de [W1] entraîne que $T_0^\theta(\mathfrak{o}_v^{nr})$ est engendré par $T_0^{\theta,0}(\mathfrak{o}_v^{nr})$ et par les éléments de $Z(G)^\theta$ d'ordre fini premier à la caractéristique résiduelle p. Ces deux groupes étant contenus dans K_v^{nr}, on a $T_0^\theta(\mathfrak{o}_v^{nr}) \subset K_v^{nr}$, donc $T_0^\theta(\mathfrak{o}_v) \subset K_{I_\star,v}$. La première assertion de (2) en résulte. La seconde en est une conséquence immédiate.

Fixons un ensemble fini V'' de places de F, contenant V et tel que l'on ait l'égalité

$$\bar{G}_\star(\mathbb{A}_F) = \bar{G}_\star(F)(\bar{G}_\star(F_{V''}) \times K_\star^{V''}),$$

où $K_\star^{V''} = \prod_{v\notin V''} K_{\star,v}$. Il résulte de (2) que l'on a

$$I_\star(\mathbb{A}_F) = I_\star(F_{V''}) \times \bar{G}_\star(\mathbb{A}_F^{V''})K_{I_\star}^{V''} = \bar{G}_\star(\mathbb{A}_F)(I_\star(F_{V''}) \times K_{I_\star}^{V''}).$$

L'égalité précédente entraîne

$$(3) \qquad I_\star(\mathbb{A}_F) = \bar{G}_\star(F)(I_\star(F_{V''}) \times K_{I_\star}^{V''}),$$

a fortiori

$$I_\star(\mathfrak{A}_F) = I_\star(F)(I_\star(F_{V''}) \times K_{I_\star}^{V''}).$$

Notons $\Xi_{\bar{G}_\star}$ la projection dans $\bar{G}_\star(F_{V''})$ de $\bar{G}_\star(F) \cap (\bar{G}_\star(F_{V'''}) \times K_\star^{V''})$. Définissons de même $\Xi_{I_\star}$. Alors on a les égalités

$$(4) \qquad \tau(\bar{G}_\star) = mes(K_\star^{V''})mes(\Xi_{\bar{G}_\star}\backslash\bar{G}_\star(F_{V''})/\mathfrak{A}_{\bar{G}_\star}),$$

(5) $\qquad \tau(I_\star)=x(I_\star)mes(K_{I_\star}^{V''})mes(\Xi_{I_\star}\backslash I_\star(F_{V''})/\mathfrak{A}_{\bar{G}_\star})$.

Pour tout $v\not\in V''$, la mesure di_v se restreint à $\bar{G}_\star(F_v)$ en la mesure dx_v multipliée par $|(I_\star/\bar{G}_\star)(F_v)|^{-1}$. La relation (2) entraîne que $mes(K_{I_\star,v})=mes(K_{\star,v})$. Donc

(6) $mes(K_\star^{V''})=mes(K_{I_\star}^{V''})$.

Fixons un ensemble de représentants $\mathcal{U}$ du quotient $\bar{G}_\star(F_{V''})\backslash I_\star(F_{V''})$. Alors $\Xi_{\bar{G}_\star}\backslash I_\star(F_{V''})/\mathfrak{A}_{\bar{G}_\star}$ est réunion disjointe des sous-ensembles $\Xi_{\bar{G}_\star}\backslash\bar{G}_\star(F_{V''})u/\mathfrak{A}_{\bar{G}_\star}$ pour $u\in\mathcal{U}$. La comparaison des mesures locales montre que chacun de ces sous-ensembles a pour mesure

$$|(I_\star/\bar{G}_\star)(F_{V''})|^{-1}mes(\Xi_{\bar{G}_\star}\backslash\bar{G}_\star(F_{V''})/\mathfrak{A}_{\bar{G}_\star}).$$

Puisque $|\mathcal{U}|=[I_\star(F_{V''}):\bar{G}_\star(F_{V''})]$, on obtient

$$mes(\Xi_{\bar{G}_\star}\backslash I_\star(F_{V''})/\mathfrak{A}_{\bar{G}_\star})=|(I_\star/\bar{G}_\star)(F_{V''})|^{-1}[I_\star(F_{V''}):\bar{G}_\star(F_{V''})]mes(\Xi_{\bar{G}_\star}\backslash\bar{G}_\star(F_{V''})/\mathfrak{A}_{\bar{G}_\star}),$$

ou encore

$$mes(\Xi_{I_\star}\backslash I_\star(F_{V''})/\mathfrak{A}_{\bar{G}_\star})=[\Xi_{I_\star}:\Xi_{\bar{G}_\star}]^{-1}|(I_\star/\bar{G}_\star)(F_{V''})|^{-1}$$
$$[I_\star(F_{V''}):\bar{G}_\star(F_{V''})]mes(\Xi_{\bar{G}_\star}\backslash\bar{G}_\star(F_{V'''})/\mathfrak{A}_{\bar{G}_\star}).$$

La relation (2) entraîne que

$$|(I_\star/\bar{G}_\star)(F_{V''})|^{-1}[I_\star(F_{V''}):\bar{G}_\star(F_{V''})]=|(I_\star/\bar{G}_\star)(F_V)|^{-1}[I_\star(F_V):\bar{G}_\star(F_V)].$$

D'autre part, (3) entraîne que $I_\star(F)=\bar{G}_\star(F)\Xi_{I_\star}$. Donc l'application naturelle $\Xi_{I_\star}/\Xi_{\bar{G}_\star}\to I_\star(F)/\bar{G}_\star(F)$ est bijective. La relation ci-dessus se récrit

(7) $$mes(\Xi_{I_\star}\backslash I_\star(F_{V''})/\mathfrak{A}_{\bar{G}_\star})=[I_\star(F):\bar{G}_\star(F)]^{-1}|(I_\star/\bar{G}_\star)(F_V)|^{-1}[I_\star(F_V):\bar{G}_\star(F_V)]$$
$$mes(\Xi_{\bar{G}_\star}\backslash\bar{G}_\star(F_{V'''})/\mathfrak{A}_{\bar{G}_\star}).$$

Le lemme résulte de (4), (5), (6) et (7). $\square$

7.14 Calcul de $d(I_\star,G)$

En appliquant la définition de 7.10 à l'élément $\eta_\star$, on définit le covolume $covol(\mathfrak{A}_{\bar{G}_\star,\mathbb{Z}})$. D'autre part, on a défini en 5.8 une constante notée $C(\tilde{G})$.

Lemme. *On a l'égalité*

$$d(I_\star,G)=x(I_\star)^{-1}\tau(G)C(\tilde{G})^{-1}covol(\mathfrak{A}_{\bar{G}_\star,\mathbb{Z}})^{-1}.$$

Preuve. Par définition, $D(I_\star,G)$ est le conoyau de l'homomorphisme

$$H^1_{ab}(\mathbb{A}_F/F;I_\star)\to H^1_{ab}(\mathbb{A}_F/F;G),$$

c'est-à-dire de l'homomorphisme

$$H^{2,1,0}(\mathbb{A}_F/F;\bar{S}_{sc}\to S\stackrel{1-\theta}{\to}(1-\theta)(S))\to H^{2,1}(\mathbb{A}_F/F;S_{sc}\to S).$$

On a une suite exacte

$$H^{1,0}(\mathbb{A}_F/F;S\stackrel{1-\theta}{\to}(1-\theta)(S))\to H^{2,1,0}(\mathbb{A}_F/F;\bar{S}_{sc}\to S\stackrel{1-\theta}{\to}(1-\theta)(S))\to H^2(\mathbb{A}_F/F;\bar{S}_{sc}).$$

Comme on l'a dit en 7.11, le dernier groupe est nul car $\bar{S}_{sc}$ est un tore elliptique. Donc $D(I_\star, G)$ est aussi le conoyau de l'homomorphisme composé

$$(1) \qquad H^{1,0}(\mathbb{A}_F/F; S \stackrel{1-\theta}{\to} (1-\theta)(S)) \to H^{2,1}(\mathbb{A}_F/F; S_{sc} \to S).$$

Dans la catégorie des complexes de tores, le triangle

$$\begin{array}{ccc} S_{sc} & \to & S \\ \| & & \downarrow 1-\theta \\ S_{sc} & \stackrel{1-\theta}{\to} & (1-\theta)(S) \\ \downarrow \pi & & \| \\ S & \stackrel{1-\theta}{\to} & (1-\theta)(S) \end{array}$$

est distingué. Il donne naissance à une suite exacte

$$H^{1,0}(\mathbb{A}_F/F; S \stackrel{1-\theta}{\to} (1-\theta)(S)) \to H^{2,1}(\mathbb{A}_F/F; S_{sc} \to S)$$

$$\to H^{2,1}(\mathbb{A}_F/F; S_{sc} \stackrel{1-\theta}{\to} (1-\theta)(S)) \to H^{2,1}(\mathbb{A}_F/F; S_{sc} \stackrel{1-\theta}{\to} (1-\theta)(S)).$$

En inspectant les définitions, on voit que le premier homomorphisme ci-dessus est égal à celui de (1). Donc $D(I_\star, G)$ est aussi le noyau du dernier homomorphisme ci-dessus. Le lemme C.2.A de [KS] entraîne par dualité que ce noyau a même nombre d'éléments que le conoyau de l'homomorphisme dual

$$(2) \qquad H^{1,0}(\Gamma_F; X^*((1-\theta)(S)) \to X^*(S)) \to H^{1,0}(\Gamma_F; X^*((1-\theta)(S)) \to X^*(S_{sc})).$$

La flèche $X^*((1-\theta)(S)) \to X^*(S)$ envoie un caractère x^* de $(1-\theta)(S)$ sur le caractère $x^* \circ (1-\theta)$ de S. La flèche $X^*((1-\theta)(S)) \to X^*(S_{sc})$ envoie un caractère x^* de $(1-\theta)(S)$ sur le caractère $x^* \circ (1-\theta) \circ \pi$ de S_{sc}. Montrons que

(3) le groupe $H^{1,0}(\Gamma_F; X^*((1-\theta)(S)) \to X^*(S_{sc}))$ est isomorphe à $\pi_0((Z(\hat{G})/Z(\hat{G}) \cap \hat{T}^{\hat{\theta},0})^{\Gamma_F})$.

On a $X^*((1-\theta)(S)) = X_*(\hat{S}/\hat{S}^{\hat{\theta},0})$ et $X^*(S_{sc}) = X_*(\hat{S}_{ad})$. Pour simplifier, notons ces groupes X_1 et X_2. Notons $\varphi : X_1 \to X_2$ l'homomorphisme défini ci-dessus ainsi que les homomorphismes qui s'en déduisent fonctoriellement. On a la suite exacte de complexes de Γ_F-modules

$$\begin{array}{ccc} 1 & & 1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_1 & \stackrel{\varphi}{\to} & X_2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_1 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} & \stackrel{\varphi}{\to} & X_2 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_1 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} & \stackrel{\varphi}{\to} & X_2 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \\ \downarrow & & \downarrow \\ 1 & & 1 \end{array}$$

D'où une suite exacte

$$(4) \qquad H^{0,\cdot}(\Gamma_F; X_1 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \to X_2 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}) \to H^{0,\cdot}(\Gamma_F; X_1 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to X_2 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

$$\to H^{1,0}(\Gamma_F; X_1 \to X_2) \to H^{1,0}(\Gamma_F; X_1 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \to X_2 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}).$$

On a noté $H^{0,\cdot}$ le groupe noté simplement H^0 par Kottwitz et Shelstad. On a aussi une suite exacte

$$H^0(\Gamma_F; X_1\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}) \to H^0(\Gamma_F; X_2\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}) \to H^{1,0}(\Gamma_F; X_1\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q} \to X_2\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}) \to H^1(\Gamma_F; X_1\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}).$$

Le dernier groupe est limite inductive de groupes $H^1(Gal(E/F); X_1 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q})$ sur les extensions galoisiennes finies E de F telles que Γ_E agisse trivialement sur X_1. Or ces groupes sont nuls puisque $Gal(E/F)$ est fini et $X_1 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ est divisible. La suite ci-dessus se récrit

$$(5) \qquad X_1^{\Gamma_F} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \to X_2^{\Gamma_F} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \to H^{1,0}(\Gamma_F; X_1 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \to X_2 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}) \to 0.$$

Il résulte des définitions que

$$X_2 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = \varphi(X_1 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}) \oplus X_2^{\hat{\theta}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}.$$

D'où

$$(6) \qquad X_2^{\Gamma_F} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = \varphi(X_1^{\Gamma_F} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}) \oplus X_2^{\Gamma_F,\hat{\theta}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}.$$

Le tore $\bar{S}_{sc}$ est elliptique donc $X_*(\bar{S}_{sc})^{\Gamma_F} = 0$. Il en résulte que $X_*(\bar{S})^{\Gamma_F} = X_*(Z(\bar{G}_\star)^0)^{\Gamma_F}$. On a déjà remarqué que $\eta_\star$ était elliptique dans $\tilde{G}(F)$. Le groupe ci-dessus est donc $X_*(Z(G)^{\theta,0})^{\Gamma_F}$. D'autre part $X_*(\bar{S}) = X_*(S)^\theta$. On obtient l'égalité $X_*(S)^{\Gamma_F,\theta} = X_*(Z(G)^{\theta,0})^{\Gamma_F}$. Cela entraîne $X_*(S_{sc})^{\Gamma_F,\theta} = 0$. Cela équivaut à $X_2^{\Gamma_F,\hat{\theta}} = 0$. Il résulte alors de (6) que la première application de (5) est surjective. En conséquence, $H^{1,0}(\Gamma_F; X_1 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \to X_2 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}) = 0$.

Il résulte des définitions que les deux premiers groupes de la suite (4) sont respectivement les noyaux des homomorphismes

$$X_1^{\Gamma_F} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \to X_2^{\Gamma_F} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$$

et

$$(X_1 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{\Gamma_F} \to (X_2 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{\Gamma_F}.$$

On peut identifier $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ au groupe des racines de l'unité dans $\mathbb{C}^\times$. Alors l'application $x_* \otimes \zeta \mapsto x_*(\zeta)$ identifie $X_1 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ au sous-groupe de torsion $(\hat{S}/\hat{S}^{\hat{\theta},0})_{tors} \subset \hat{S}/\hat{S}^{\hat{\theta},0}$. Le sous-groupe $(X_1 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{\Gamma_F}$ s'identifie à $(\hat{S}/\hat{S}^{\hat{\theta},0})_{tors}^{\Gamma_F}$. Notons K le noyau de l'homomorphisme

$$\hat{S}/\hat{S}^{\hat{\theta},0} \to \hat{S}_{ad}.$$

Alors le deuxième groupe de la suite (4) s'identifie à $K_{tors}^{\Gamma_F}$. On voit que l'image du premier groupe est $(K^{\Gamma_F,0})_{tors}$. A ce point, on déduit de (4) une suite exacte

$$(K^{\Gamma_F,0})_{tors} \to K_{tors}^{\Gamma_F} \to H^{1,0}(\Gamma_F; X_1 \to X_2) \to 0$$

On vérifie facilement que l'homomorphisme naturel

$$(K^{\Gamma_F,0})_{tors} \backslash K_{tors}^{\Gamma_F} \to \pi_0(K^{\Gamma_F})$$

est bijectif. D'autre part, le noyau de l'application $t \mapsto (1-\theta)(t_{ad})$ de $\hat{S}$ dans $\hat{S}_{ad}$ est $Z(\hat{G})\hat{S}^{\hat{\theta},0}$. Il en résulte que $K \simeq Z(\hat{G})/Z(\hat{G}) \cap \hat{S}^{\hat{\theta},0}$. Le tore $\hat{S}$ est égal à $\hat{T}$ muni de l'action galoisienne $\sigma \mapsto \omega_S(\sigma) \circ \sigma_{G^*}$. Sur $Z(\hat{G})$, cette action coïncide avec $\sigma \mapsto \sigma_{G^*}$.

Donc $Z(\hat{G})/Z(\hat{G})\cap\hat{S}^{\hat{\theta},0} = Z(\hat{G})/Z(\hat{G})\cap\hat{T}^{\hat{\theta},0}$ (en tant que groupes munis d'actions galoisiennes). On en déduit

$$(K^{\Gamma_F,0})_{tors}\backslash K^{\Gamma_F}_{tors} \simeq \pi_0(K^{\Gamma_F}) \simeq \pi_0((Z(\hat{G})/Z(\hat{G})\cap\hat{T}^{\hat{\theta},0})^{\Gamma_F})$$

puis (3).

L'application (2) s'insère dans un diagramme de suites exactes de cohomologie

$$\begin{array}{ccc}
H^0(\Gamma_F; X^*((1-\theta)(S))) & = & H^0(\Gamma_F; X^*((1-\theta)(S))) \\
\downarrow & & \downarrow \\
H^0(\Gamma_F; X^*(S)) & \to & H^0(\Gamma_F; X^*(S_{sc})) \\
\downarrow & & \downarrow \\
H^{1,0}(\Gamma_F; X^*((1-\theta)(S)) \to X^*(S)) & \to & H^{1,0}(\Gamma_F; X^*((1-\theta)(S)) \to X^*(S_{sc})) \\
\downarrow & & \downarrow \\
H^1(\Gamma_F; X^*((1-\theta)(S))) & = & H^1(\Gamma_F; X^*((1-\theta)(S)))
\end{array}$$

Il en résulte formellement que le noyau de (2) est l'image dans $H^{1,0}(\Gamma_F; X^*((1-\theta)(S)) \to X^*(S))$ du noyau de

$$H^0(\Gamma_F; X^*(S)) \to H^0(\Gamma_F; X^*(S_{sc})).$$

Mais le noyau de $X^*(S) \to X^*(S_{sc})$ n'est autre que $X^*(G)$. Donc le noyau de (2) est l'image naturelle dans $H^{1,0}(\Gamma_F; X^*((1-\theta)(S)) \to X^*(S))$ de $X^*(G)^{\Gamma_F}$. D'autre part, on a la suite exacte

$$1 \to S^\theta \to S \stackrel{1-\theta}{\to} (1-\theta)(S) \to 1$$

Le groupe S^θ n'est pas connexe mais est diagonalisable. Il en résulte une suite exacte

$$0 \to X^*((1-\theta)(S)) \to X^*(S) \to X^*(S^\theta) \to 0$$

Il en résulte formellement l'égalité

$$H^{1,0}(\Gamma_F; X^*((1-\theta)(S)) \to X^*(S)) = X^*(S^\theta)^{\Gamma_F}.$$

L'homomorphisme de $X^*(G)^{\Gamma_F}$ dans ce groupe n'est autre que l'application de restriction. En notant $Im(X^*(G)^{\Gamma_F})$ son image, on obtient que l'image de l'application (2) est isomorphe à $X^*(S^\theta)^{\Gamma_F}/Im(X^*(G)^{\Gamma_F})$. On a dit que $d(I_\star, G)$ était égal au nombre d'éléments du conoyau de l'homomorphisme (2). Grâce à (3) et au résultat précédent, on obtient

$$d(I_\star, G) = |\pi_0((Z(\hat{G})/Z(\hat{G})\cap\hat{T}^{\hat{\theta},0})^{\Gamma_F})|[X^*(S^\theta)^{\Gamma_F} : Im(X^*(G)^{\Gamma_F})]^{-1}.$$

Notons $Im(X^*(G)^{\Gamma_F,\theta})$ l'image dans $X^*(S^\theta)^{\Gamma_F}$ du sous-groupe $X^*(G)^{\Gamma_F,\theta} \subset X^*(G)^{\Gamma_F}$. Kottwitz et Shelstad ont calculé

$$[Im(X^*(G)^{\Gamma_F}) : Im(X^*(G)^{\Gamma_F,\theta})] = |det((1-\theta)_{|\mathfrak{A}_G/\mathfrak{A}_{\tilde{G}}})||\pi_0(\hat{T}^{\hat{\theta},0}\cap Z(\hat{G})^{\Gamma_F,0})|^{-1},$$

cf. [KS] calcul de l'expression 6.4.14. L'expression ci-dessus se transforme en

$$d(I_\star, G) = |\pi_0((Z(\hat{G})/Z(\hat{G})\cap\hat{T}^{\hat{\theta},0})^{\Gamma_F})||det((1-\theta)_{|\mathfrak{A}_G/\mathfrak{A}_{\tilde{G}}})||\pi_0(\hat{T}^{\hat{\theta},0}\cap Z(\hat{G})^{\Gamma_F,0})|^{-1}$$

$$[X^*(S^\theta)^{\Gamma_F} : Im(X^*(G)^{\Gamma_F,\theta})]^{-1}.$$

En se rappelant la définition de $C(\tilde{G})$ donnée en 5.8, on peut récrire

$$d(I_\star,G)=C(\tilde{G})^{-1}\tau(G)covol(\mathfrak{A}_{\tilde{G},\mathbb{Z}})^{-1}[X^*(S^\theta)^{\Gamma_F}:Im(X^*(G)^{\Gamma_F,\theta})]^{-1}.$$

Pour obtenir le lemme, il reste à prouver l'égalité

$$(7)\qquad x(I_\star)covol(\mathfrak{A}_{\bar{G}_\star,\mathbb{Z}})=[X^*(S^\theta)^{\Gamma_F}:Im(X^*(G)^{\Gamma_F,\theta})]covol(\mathfrak{A}_{\tilde{G},\mathbb{Z}}).$$

Le groupe $I_\star$ est isomorphe au quotient de $Z(I_\star)\times\bar{G}_{\star,SC}$ par le sous-groupe formé des $(\bar{\pi}_\star(z)^{-1},z)$ pour $z\in Z(\bar{G}_{\star,SC})$. Il en résulte que $X^*(I_\star)$ est le groupe des caractères du groupe $Z(I_\star)/\bar{\pi}_\star(Z(\bar{G}_{\star,SC}))$. L'homomorphisme naturel de ce groupe dans $S^\theta/\bar{\pi}_\star(\bar{S}_{sc})$ est un isomorphisme. Donc $X^*(I_\star)=X^*(S^\theta/\bar{\pi}_\star(\bar{S}_{sc}))$. On obtient une suite exacte

$$0\to X^*(I_\star)\to X^*(S^\theta)\to X^*(\bar{S}_{sc}).$$

D'où aussi une suite exacte

$$0\to X^*(I_\star)^{\Gamma_F}\to X^*(S^\theta)^{\Gamma_F}\to X^*(\bar{S}_{sc})^{\Gamma_F}.$$

Mais $\bar{S}_{sc}$ est un tore elliptique donc le dernier groupe est nul. Finalement

$$(8)\qquad X^*(I_\star)^{\Gamma_F}=X^*(S^\theta)^{\Gamma_F}.$$

On a un diagramme commutatif d'homomorphismes naturels

$$(9)\qquad \begin{array}{ccccccc} & & & & & & X^*(G)^{\Gamma_F,\theta}\\ & & & & & \swarrow & \downarrow\phi\\ 0 & \to & X^*(I_\star/\bar{G}_\star)^{\Gamma_F} & \to & X^*(I_\star)^{\Gamma_F} & \to & X^*(\bar{G}_\star)^{\Gamma_F}\end{array}$$

La suite horizontale est exacte. La flèche verticale ϕ s'inscrit dans un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} X^*(G)^{\Gamma_F,\theta} & \to & X^*(Z(G)^0)^{\Gamma_F,\theta}\\ \downarrow\phi & & \downarrow\\ X^*(\bar{G}_\star)^{\Gamma_F} & \to & X^*(Z(\bar{G}_\star)^0)^{\Gamma_F}\end{array}$$

Les flèches horizontales sont injectives. La flèche de droite est injective : cela résulte de l'ellipticité de $\eta_\star$. Donc la flèche de gauche est aussi injective. En revenant au diagramme (9), on en déduit un diagramme commutatif à flèches injectives

$$\begin{array}{ccccc} & & X^*(G)^{\Gamma_F,\theta} & & \\ & \phi_1\swarrow & & \searrow\phi & \\ X^*(I_\star)^{\Gamma_F}/X^*(I_\star/\bar{G}_\star)^{\Gamma_F} & & \stackrel{\phi_2}{\to} & & X^*(\bar{G}_\star)^{\Gamma_F}\end{array}$$

Par définition, on a

$$x(I_\star)=|X^*(I_\star/\bar{G}_\star)^{\Gamma_F}||coker(\phi_2)|^{-1}.$$

L'injectivité de ϕ_1 et la relation (8) entraînent que

$$[X^*(S^\theta)^{\Gamma_F}:Im(X^*(G)^{\Gamma_F,\theta})]=|X^*(I_\star/\bar{G}_\star)^{\Gamma_F}||coker(\phi_1)|.$$

Il en résulte que

$$x(I_\star)[X^*(S^\theta)^{\Gamma_F}:Im(X^*(G)^{\Gamma_F,\theta})]^{-1}=|coker(\phi_2)|^{-1}|coker(\phi_1)|^{-1}=|coker(\phi)|^{-1}.$$

D'après les définitions, on a aussi

$$|coker(\phi)|=|\mathfrak{A}_{\tilde{G},\mathbb{Z}}/\mathfrak{A}_{\bar{G}_\star,\mathbb{Z}}|=covol(\mathfrak{A}_{\bar{G}_\star,\mathbb{Z}})covol(\mathfrak{A}_{\tilde{G},\mathbb{Z}})^{-1}.$$

L'égalité (7) résulte des deux égalités ci-dessus. Cela achève la démonstration. □

7.15 Preuve de la proposition 7.10

Les lemmes 7.12, 7.13 et 7.14 conduisent à l'égalité

$$|P^0||\mathbb{U}|^{-1} = C(\tilde{G})\tau(\bar{G}_\star)[I_\star(F) : \bar{G}_\star(F)]^{-1}[I_\star(F_V) : \bar{G}_\star(F_V)]covol(\mathfrak{A}_{\bar{G}_\star})^{-1}.$$

On a aussi $|\mathbb{U}| = |\dot{D}_F[d_V]|$ d'après le lemme 7.5. Enfin, l'assertion 7.3(1) entraîne que pour tout $d \in D_F[d_V]$, il y a des isomorphismes compatibles et définis sur F de $I_\star$ sur $I_{\eta[d]}$ et de $\bar{G}_\star$ sur $G_{\eta[d]}$. On peut donc remplacer dans le deuxième membre de l'égalité ci-dessus les termes $I_\star$ et $\bar{G}_\star$ par $I_{\eta[d]}$ et $G_{\eta[d]}$. La proposition 7.10 en résulte.

7.16 Calcul final

On lève l'hypothèse $D_F[d_V] \neq \emptyset$ posée en 7.3. Considérons l'expression

(1) $\bar{f}[d_V] \sum_{j\in\mathcal{J}(\mathbf{H})} \delta_j[d_V]$

qui apparaît dans la formule 5.9(2).

Corollaire. *Pourvu que l'ensemble de places V' soit assez grand, l'expression (1) est égale à*

$$C(\tilde{G})^{-1} \sum_{d\in\dot{D}_F[d_V]} \tau(G_{\eta[d]})[I_{\eta[d]}(F) : G_{\eta[d]}(F)]^{-1}[I_{\eta[d]}(F_V) : G_{\eta[d]}(F_V)]covol(\mathfrak{A}_{G_{\eta[d]}})^{-1}$$

$$|\mathcal{U}[V', d]|^{-1} \sum_{u\in\mathcal{U}[V',d]} \omega(uh[d])\bar{f}[d, u].$$

Cela résulte du corollaire 7.2 et de la proposition 7.10.

8 Preuve du théorème 3.3

8.1 Suite du calcul de la section 5

Utilisons le corollaire 7.16 pour transformer la formule 5.9(2). Il y a deux simplifications. La constante $C(\tilde{G})$ apparaît deux fois et ses deux occurences se compensent. Le terme $c[d_V]$ défini en 5.9 est égal à $[I_{\eta[d]}(F_V) : G_{\eta[d]}(F_V)]^{-1}$ pour tout $d \in \dot{D}_F[d_V]$ et ce terme compense l'un de ceux intervenant dans le corollaire 7.16. D'autre part, il intervient dans ce corollaire un ensemble fini de places V' qui doit être assez grand. Cette notion dépend a priori des éléments fixés dans la section 7, à savoir d_V et $\mathbf{H}$. Mais ces données d_V et $\mathbf{H}$ parcourent des ensembles finis. On peut donc fixer un ensemble V' assez grand pour que le corollaire 7.16 soit valable pour tous d_V et $\mathbf{H}$. On obtient alors

$$I^{\tilde{G}}(\underline{A}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(V, \mathbf{H}, \omega), f) = |W^G(\mu)|^{-1}|Fix^G(\mu, \omega_{\bar{G}})|^{-1}\tau(\bar{H})^{-1}|W^{\bar{H}}|$$

$$\sum_{d_V\in\dot{D}_V^{rel}} \sum_{d\in\dot{D}_F[d_V]} \tau(G_{\eta[d]})[I_{\eta[d]}(F) : G_{\eta[d]}(F)]^{-1}covol(\mathfrak{A}_{G_{\eta[d]},\mathbb{Z}})^{-1}$$

$$|\mathcal{U}[V', d]|^{-1} \sum_{u\in\mathcal{U}[V',d]} \omega(uh[d])S^{\bar{H}}(SA^{\bar{H}}_{unip}(V), \bar{f}[d, u]).$$

Notons D_F^{V-nr} l'ensemble des $d \in D_F$ tels que la projection de d dans $D_{\mathbb{A}_F^V}$ appartienne à $D_{\mathbb{A}_F^V}^{nr}$. L'ensemble $D_F[d_V]$ a été défini en 6.9. Dans ce paragraphe, on supposait d_V relevante mais c'était inutile pour cette définition. On peut alors définir $\dot{D}_F[d_V]$ comme en 7.1 sans cette hypothèse de relevance. Notons $\dot{D}_F^{V-nr}$ la réunion des $\dot{D}_F[d_V]$ pour $d_V \in \dot{D}_V$. C'est un ensemble de représentants de l'ensemble de doubles classes

$$I_\eta(\bar{F})\backslash D_F^{V-nr}/G(F).$$

La même preuve qu'en 7.1(1) montre que c'est un ensemble fini. Grâce à 5.5(4), la double somme ci-dessus en $d_V \in \dot{D}_V^{rel}$ et $d \in \dot{D}_F[d_V]$ se simplifie en une somme sur les $d \in \dot{D}_F^{V-nr}$ tels que $\mathbf{H}$ soit relevante pour $G_{\eta[d],SC}$. D'où

$$I^{\tilde{G}}(\underline{A}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(V,\mathbf{H},\omega),f) = |W^G(\mu)|^{-1}|Fix^G(\mu,\omega_{\bar{G}})|^{-1}\tau(\bar{H})^{-1}|W^{\bar{H}}|$$

$$\sum_{d\in\dot{D}_F^{V-nr},\mathbf{H}\text{ relevante pour }G_{\eta[d],SC}} \tau(G_{\eta[d]})[I_{\eta[d]}(F):G_{\eta[d]}(F)]^{-1}covol(\mathfrak{A}_{G_{\eta[d]},\mathbb{Z}})^{-1}$$

$$|\mathcal{U}[V',d]^{-1}\sum_{u\in\mathcal{U}[V',d]}\omega(uh[d])S^{\bar{H}}(SA^{\bar{H}}_{unip}(V),\bar{f}[d,u]).$$

On peut maintenant lever la première hypothèse faite sur $\mathbf{H}$, à savoir que D_V^{rel} est non vide. Si elle n'est pas vérifiée, le membre de droite est nul car la somme en d est vide. Le membre de gauche est nul lui-aussi d'après le corollaire 5.6. L'égalité est donc encore vérifiée. Rappelons que la fonction $\bar{f}[d,u]$ qui intervient ici est le transfert à $\bar{H}(F_V)$ d'une fonction $f[d]_{sc}$ sur $G_{\eta[d],SC}(F_V)$, le facteur de transfert étant déterminé par u. Il convient d'introduire la donnée $\mathbf{H}$ dans la notation et de noter plutôt cette fonction $\bar{f}^{\mathbf{H}}[d,u]$. Utilisons maintenant l'égalité 5.3(1). On obtient

$$(1)\qquad I^{\tilde{G}}(\underline{A}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(V,\mu,\omega_{\bar{G}},\omega),f) = |W^G(\mu)|^{-1}|Fix^G(\mu,\omega_{\bar{G}})|^{-1}$$

$$\sum_{d\in\dot{D}_F^{V-nr}}\tau(G_{\eta[d]})[I_{\eta[d]}(F):G_{\eta[d]}(F)]^{-1}covol(\mathfrak{A}_{G_{\eta[d]},\mathbb{Z}})^{-1}|\mathcal{U}[V',d]|^{-1}\sum_{u\in\mathcal{U}[V',d]}\omega(uh[d])X[d,u],$$

où

$$X[d,u] = \sum_{\mathbf{H}\in E_{\hat{\bar{T}}_{ad},\star}(\bar{G}_{SC},V),\mathbf{H}\text{ relevante pour }G_{\eta[d],SC}}\tau(\bar{H})^{-1}|W^{\bar{H}}|S^{\bar{H}}(SA^{\bar{H}}_{unip}(V),\bar{f}^{\mathbf{H}}[d,u]).$$

8.2 Elimination de la somme en H

Fixons $d \in \dot{D}_F^{V-nr}$ et $u \in \mathcal{U}[V',d]$. Notons $E_{\hat{\bar{T}}_{ad}}(G_{\eta[d],SC},V)$ l'ensemble de sommation qui intervient dans la définition de $X[d,u]$, c'est-à-dire l'ensemble des $\mathbf{H} \in E_{\hat{\bar{T}}_{ad},\star}(\bar{G}_{SC},V)$ qui sont relevantes pour $G_{\eta[d],SC}$. Fixons comme toujours un ensemble $\mathcal{E}(G_{\eta[d],SC},V)$ de représentants des classes d'équivalence de données endoscopiques de $G_{\eta[d],SC}$ qui sont elliptiques, non ramifiées hors de V et relevantes. Il y a une application naturelle $E_{\hat{\bar{T}}_{ad}}(G_{\eta[d],SC},V)\to\mathcal{E}(G_{\eta[d],SC},V)$ qui, à $\mathbf{H}$ dans l'ensemble de départ, associe le représentant de sa classe d'équivalence. Cette application est surjective : toute donnée endoscopique de $G_{\eta[d],SC}$ est équivalente à une donnée $(\bar{H},\bar{\mathcal{H}},\bar{s})$ telle que $\bar{s}$ appartienne à $\hat{\hat{T}}_{ad}$. Les nombres d'éléments des fibres de cette application se calculent comme en 5.1. On obtient que la fibre contenant un élément $\mathbf{H} \in E_{\hat{\hat{T}}_{ad}}(G_{\eta[d],SC}, V)$ a pour nombre d'éléments $|W^{\bar{G}}||W^{\bar{H}}|^{-1}|Out(\mathbf{H})|^{-1}$. On obtient

$$X[d,u] = |W^{\bar{G}}| \sum_{\mathbf{H} \in \mathcal{E}(G_{\eta[d],SC},V)} \tau(\bar{H})^{-1}|Out(\mathbf{H})|^{-1} S^{\bar{H}}(SA^{\bar{H}}_{unip}(V), \bar{f}^{\mathbf{H}}[d,u]).$$

En utilisant la définition [VI] 5.1, on voit que $\tau(\bar{H})^{-1}|Out(\mathbf{H})|^{-1} = \tau(G_{\eta[d],SC})^{-1} i(G_{\eta[d],SC}, \bar{H})$. Ici $\tau(G_{\eta[d],SC}) = 1$ puisque $G_{\eta[d],SC}$ est simplement connexe ([Lab1] théorème 1.2). D'autre part,

$$S^{\bar{H}}(SA^{\bar{H}}_{unip}(V), \bar{f}^{\mathbf{H}}[d,u]) = I^{G_{\eta[d],SC}}(transfert_u(SA^{\bar{H}}_{unip}(V)), f[d]_{sc}),$$

où $transfert_u$ désigne le transfert relatif au facteur de transfert $\Delta_V[d,u]$ défini en 7.1. On obtient

$$X[d,u] = |W^{\bar{G}}| I^{G_{\eta[d],SC}}(B[d,u], f[d]_{sc}),$$

où

$$B[d,u] = \sum_{\mathbf{H} \in \mathcal{E}(G_{\eta[d],SC},V)} i(G_{\eta[d],SC}, \bar{H}) transfert_u(SA^{\bar{H}}_{unip}(V)).$$

En se reportant à la définition de 1.10, on voit que $B[d,u]$ n'est autre que la distribution $A^{G_{\eta[d],SC},\mathcal{E}}_{unip}(V)$. Plus exactement, on se rappelle que cette distribution dépend d'un choix de sous-groupes compacts hyperspéciaux des groupes $G_{\eta[d],SC}(F_v)$ pour $v \notin V$. Puisqu'on utilise le facteur de transfert $\Delta_V[d,u]$, ces groupes sont les $K_{sc,v}[d,u]$ définis en 7.1. Notons $K_v[d]$ le sous-groupe compact hyperspécial de $G_{\eta[d]}(F_v)$ défini par $K_v[d] = ad_{h_v[d]}(K_v) \cap G_{\eta[d]}(F_v)$. Avec la notation de 4.3, on a $\prod_{v \notin V} K_{sc,v}[d,u] = {}^u K[d]^V_{sc}$. On a donc précisément $B[d,u] = A^{G_{\eta[d],SC},\mathcal{E}}_{unip}(V, {}^u K[d]^V_{sc})$. On est ici dans une situation sans torsion et on peut appliquer le théorème d'Arthur 3.1. Donc $B[d,u] = A^{G_{\eta[d],SC}}_{unip}(V, {}^u K[d]^V_{sc})$ et

$$X[d,u] = |W^{\bar{G}}| I^{G_{\eta[d],SC}}(A^{G_{\eta[d],SC}}_{unip}(V, {}^u K[d]^V_{sc}), f[d]_{sc}).$$

8.3 Elimination des revêtements simplement connexes

Fixons $d \in \dot{D}^{V-nr}_F$. Grâce à la dernière formule ci-dessus, on a

$$|\mathcal{U}[V',d]|^{-1} \sum_{u \in \mathcal{U}[V',d]} \omega(uh[d]) X[d,u] = |W^{\bar{G}}| \omega(h[d]) I^{G_{\eta[d],SC}}(A^{G_{\eta[d],SC}}_{unip;G_{\eta[d]},\omega,V'}(V), f[d]_{sc}),$$

où $A^{G_{\eta[d],SC}}_{unip;G_{\eta[d]},\omega,V'}(V)$ est défini en 4.3. Puisque $f[d]_{sc} = \iota_{G_{\eta[d],SC},G_{\eta[d]}}(f[d])$, on a

$$I^{G_{\eta[d],SC}}(A^{G_{\eta[d],SC}}_{unip;G_{\eta[d]},\omega,V'}(V), f[d]_{sc}) = I^{G_{\eta[d]}}(\iota^*_{G_{\eta[d],SC},G_{\eta[d]}}(A^{G_{\eta[d],SC}}_{unip;G_{\eta[d]},\omega,V'}(V)), f[d]).$$

On applique la proposition 4.3. L'ensemble de places V' doit être assez grand, cette notion dépendant de d. Puisqu'on a déjà dit que l'ensemble $\dot{D}^{V-nr}_F$ était fini, on peut supposer que l'ensemble V' fixé en 8.1 satisfait cette condition pour tout d. La proposition 4.3 nous dit que

$$\iota^*_{G_{\eta[d],SC},G_{\eta[d]}}(A^{G_{\eta[d],SC}}_{unip;G_{\eta[d]},\omega,V'}(V)) = \tau'(G_{\eta[d],SC})\tau'(G_{\eta[d]})^{-1} A^{G_{\eta[d]}}_{unip}(V, \omega, K[d]^V).$$

Puisque $G_{\eta[d],SC}$ est simplement connexe, on a $\mathfrak{A}_{G_{\eta[d],SC}} = \{0\}$ et $\tau(G_{\eta[d],SC}) = 1$ ([Lab1] théorème 1.2). Donc aussi $\tau'(G_{\eta[d],SC}) = 1$. On a aussi par définition

$$\tau'(G_{\eta[d]}) = \tau(G_{\eta[d]})covol(\mathfrak{A}_{G_{\eta[d]},\mathbb{Z}})^{-1}.$$

D'où

$$|\mathcal{U}[V',d]|^{-1} \sum_{u\in\mathcal{U}[V',d]} \omega(uh[d])X[d,u] = |W^{\bar{G}}|\omega(h[d])\tau(G_{\eta[d]})^{-1}covol(\mathfrak{A}_{G_{\eta[d]},\mathbb{Z}})$$

$$I^{G_{\eta[d]}}(A^{G_{\eta[d]}}_{unip}(V,\omega,K[d]^V),f[d]).$$

Reportons cette valeur dans la formule 8.1(1). Comme on l'a dit en 1.1, le groupe $W^G(\mu)$ s'identifie à $W^{\bar{G}}$. On obtient

$$(1) \qquad I^{\tilde{G}}(\underline{A}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(V,\mu,\omega_{\bar{G}},\omega),f) = |Fix^G(\mu,\omega_{\bar{G}})|^{-1}$$

$$\sum_{d\in\dot{D}_F^{V-nr}} [I_{\eta[d]}(F) : G_{\eta[d]}(F)]^{-1}\omega(h[d])I^{G_{\eta[d]}}(A^{G_{\eta[d]}}_{unip}(V,\omega,K[d]^V),f[d]).$$

8.4 Fin de la preuve

Rappelons qu'il nous suffit de prouver la proposition 5.1, c'est-à-dire l'égalité

$$(1) \qquad I^{\tilde{G}}(\underline{A}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(V,\mu,\omega_{\bar{G}},\omega),f) = I^{\tilde{G}}(A^{\tilde{G}}(V,\mathcal{X},\omega),f).$$

Supposons que $\mathcal{X}$ n'appartienne pas à l'image de l'application $\chi^{\tilde{G}}$, c'est-à-dire ne corresponde à aucune classe de conjugaison stable dans $\tilde{G}_{ss}(F)$. Alors l'ensemble D_F est vide, a fortiori $\dot{D}_F^{V-nr}$ aussi et la formule 8.3(1) montre que $I^{\tilde{G}}(\underline{A}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(V,\mu,\omega_{\bar{G}},\omega),f) = 0$. D'après la définition 1.9, on a aussi $I^{\tilde{G}}(A^{\tilde{G}}(V,\mathcal{X},\omega),f) = 0$. L'égalité (1) ci-dessus en résulte.

Nous supposons maintenant que $\mathcal{X}$ est l'image par $\chi^{\tilde{G}}$ d'une classe de conjugaison stable $\mathcal{O} \subset \tilde{G}(F)$. Cette classe est unique d'après la proposition 1.2 et c'est la classe de conjugaison stable de $\eta[d]$ pour tout $d \in D_F$. Notons $Cl(\mathcal{O})$ l'ensemble des classes de conjugaison par $G(F)$ contenues dans $\mathcal{O}$. Il y a une application naturelle $D_F \to Cl(\mathcal{O})$ qui, à $d \in D_F$, associe la classe de conjugaison de $\eta[d]$. Elle est surjective et se quotiente en une application de $I_\eta(\bar{F})\backslash D_F/G(F)$ dans $Cl(\mathcal{O})$. Etendons l'ensemble $\dot{D}_F^{V-nr}$ en un ensemble de représentants $\dot{D}_F$ de l'ensemble de doubles classes $I_\eta(\bar{F})\backslash D_F/G(F)$. L'application ci-dessus devient une application $cl : \dot{D}_F \to Cl(\mathcal{O})$. Soit $d \in \dot{D}_F$, posons $\mathcal{C} = cl(d)$. Utilisons la définition [VI] 2.3 ainsi que les hypothèses (1), (2) et (4) posées en 5.1. Considérons la propriété

(2) pour tout $v \notin V$, la classe de conjugaison par $G(F_v)$ engendrée par $\mathcal{C}$ coupe $\tilde{K}_v$.

Elle équivaut à ce que, pour tout $v \notin V$, l'image de d dans D_v appartienne à D_v^{nr}, cf. 5.5. Ou encore à $d \in \dot{D}_F^{V-nr}$. Si (2) n'est pas vérifiée, on a $A^{\tilde{G}}(V,\mathcal{C},\omega) = 0$. Si (2) est vérifiée, la définition [VI] 2.3(7) conduit à l'égalité

$$I^{\tilde{G}}(A^{\tilde{G}}(V,\mathcal{C},\omega),f) = [Z_G(\eta[d];F) : G_{\eta[d]}(F)]^{-1}\omega(h[d])I^{G_{\eta[d]}}(A^{G_{\eta[d]}}_{unip}(V,\omega,K[d]^V),f[d]).$$

Il résulte alors de 8.3(1) que

$$(3)\qquad I^{\tilde{G}}(\underline{A}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(V,\mu,\omega_{\bar{G}},\omega),f)=|Fix^G(\mu,\omega_{\bar{G}})|^{-1}$$

$$\sum_{d\in\dot{D}_F}[Z_G(\eta[d];F):I_{\eta[d]}(F)]I^{\tilde{G}}(A^{\tilde{G}}(V,cl(d),\omega),f).$$

L'ensemble de sommation peut maintenant être infini mais seuls un nombre fini de termes sont non nuls.

On va prouver

(4) pour tout $d\in\dot{D}_F$, la fibre de l'application cl au-dessus de $cl(d)$ a pour nombre d'éléments $|Fix^G(\mu,\omega_{\bar{G}})|[Z_G(\eta[d];F):I_{\eta[d]}(F)]^{-1}$.

L'élément $d\in\dot{D}_F$ est fixé. On rappelle que l'on note $\mathcal{Y}_{\eta[d]}$ l'ensemble des $y\in G(\bar{F})$ tels que $y\sigma(y)^{-1}\in I_{\eta[d]}(\bar{F})$ pour tout $\sigma\in\Gamma_F$. L'application $y\mapsto(y^{-1}\eta[d]y,r[d]y)$ est une bijection de $\mathcal{Y}_{\eta[d]}$ sur D_F (la preuve est analogue à celle de 5.4(4)). L'inverse de cette bijection identifie $\dot{D}_F$ à un ensemble de représentants de l'ensemble de doubles classes

$$I_{\eta[d]}(\bar{F})\backslash\mathcal{Y}_{\eta[d]}/G(F).$$

L'élément $y^{-1}\eta[d]y$ est conjugué à $\eta[d]$ par un élément de $G(F)$ si et seulement si $y\in Z_G(\eta[d];\bar{F})G(F)$. Ou encore, puisque y est supposé appartenir à $\mathcal{Y}_{\eta[d]}$, si et seulement si $y\in(Z_G(\eta[d];\bar{F})\cap\mathcal{Y}_{\eta[d]})G(F)$. Donc la fibre de cl au-dessus de $cl(d)$ est en bijection avec l'ensemble de doubles classes

$$(5)\qquad I_{\eta[d]}(\bar{F})\backslash(Z_G(\eta[d];\bar{F})\cap\mathcal{Y}_{\eta[d]})G(F)/G(F).$$

Posons $\Xi[d]=I_{\eta[d]}(\bar{F})\backslash Z_G(\eta[d];\bar{F})$. C'est un groupe fini qui est muni d'une action naturelle de Γ_F. Il résulte des définitions que

$$\Xi[d]^{\Gamma_F}=I_{\eta[d]}(\bar{F})\backslash(Z_G(\eta[d];\bar{F})\cap\mathcal{Y}_{\eta[d]}).$$

Ce groupe contient contient le sous-groupe $\Xi_F[d]=I_{\eta[d]}(F)\backslash Z_G(\eta[d];F)$. On voit que l'application naturelle de $\Xi[d]^{\Gamma_F}$ dans l'ensemble (5) se quotiente en une bijection de $\Xi[d]^{\Gamma_F}/\Xi_F[d]$ sur cet ensemble. On en déduit que le nombre d'éléments de la fibre de cl au-dessus de $cl(d)$ est égal à

$$(6)\qquad |\Xi[d]^{\Gamma_F}|[Z_G(\eta[d];F):I_{\eta[d]}(F)]^{-1}.$$

On va identifier l'ensemble $\Xi[d]$ et son action galoisienne. Munissons le groupe W^{θ^*} de l'action galoisienne $\sigma\mapsto\sigma_{\bar{G}}$ définie par $\sigma_{\bar{G}}(w)=\omega_{\bar{G}}(\sigma)\sigma_{G^*}(w)\omega_{\bar{G}}(\sigma)^{-1}$. Le groupe W^{θ^*} agit naturellement sur $(T^*/(1-\theta^*)(T^*))\times_{\mathcal{Z}(G)}\mathcal{Z}(\tilde{G})$, cf. 1.1. Notons $Fix^G(\mu)$ le groupe des $w\in W^{\theta^*}$ tels que $w\mu=\mu$ et $w(\Sigma_+(\mu))=\Sigma_+(\mu)$, cf. 1.1 pour les notations. Pour tout $\sigma\in\Gamma_F$, $\omega_{\bar{G}}(\sigma)\circ\sigma_{G^*}$ fixe μ et conserve $\Sigma_+(\mu)$. On en déduit que l'action galoisienne $\sigma\mapsto\sigma_{\bar{G}}$ sur W^{θ^*} conserve $Fix^G(\mu)$. D'après la définition de 5.1, $Fix^G(\mu,\omega_{\bar{G}})$ n'est autre que l'ensemble de points fixes par cette action dans $Fix^G(\mu)$. On va montrer

(7) il existe un isomorphisme de $\Xi[d]$ sur $Fix^G(\mu)$ qui entrelace l'action galoisienne naturelle sur $\Xi[d]$ avec l'action $\sigma\mapsto\sigma_{\bar{G}}$ sur $Fix^G(\mu)$.

En admettant cela, on a

$$|\Xi[d]^{\Gamma_F}|=|Fix^G(\mu,\omega_{\bar{G}})|$$

et (4) résulte alors de la formule (6). Prouvons (7). Posons $\Xi = I_\eta\backslash Z_G(\eta) = I_\eta(\bar{F})\backslash Z_G(\eta;\bar{F})$. Soit $\xi \in \Xi$ et relevons ξ en un élément $x \in Z_G(\eta)$. Quitte à multiplier x à gauche par un élément de I_η, on peut supposer que ad_x conserve $T^{*,\theta^*,0}$ et $\bar{B} = B^* \cap \bar{G}$. Il en résulte que ad_x conserve T^* donc x s'envoie sur un élément $w \in W$. Cet élément est invariant par θ^*. L'élément x est uniquement déterminé modulo multiplication à gauche par un élément de T^{*,θ^*}. Donc w est bien déterminé. Le fait que x appartient à $Z_G(\eta)$ entraîne que w fixe μ. Parce que ad_x conserve $\bar{B} = B^* \cap \bar{G}$, w conserve $\Sigma_+(\mu)$. Autrement dit, $w \in Fix^G(\mu)$. Cela définit une application $\xi \mapsto w$ de Ξ dans $Fix^G(\mu)$. Il est immédiat que c'est un homomorphisme de groupes. Son noyau est l'ensemble des $\xi \in \Xi$ qui se relèvent en un élément $x \in T^* \cap Z_G(\eta)$. Mais ce groupe est égal à T^{*,θ^*} qui est contenu dans I_η. Donc le noyau est nul. Montrons que l'application $\xi \mapsto w$ est surjective. Soit $w \in Fix^G(\mu)$. Ecrivons $\eta = \nu e$ avec $\nu \in T^*$ et $e \in Z(\tilde{G};\mathcal{E}^*)$. On relève w en un élément $x \in G_e$ qui normalise T^*. Parce que w fixe μ, il existe $t \in T^*$ tel que $ad_x(\nu) = (1-\theta^*)(t)\nu$. Ou encore, puisque ad_x fixe e, $ad_x(\eta) = (1-\theta^*)(t)\eta$. L'élément $t^{-1}x$ relève encore w et appartient à $Z_G(\eta)$. En notant ξ l'image de $t^{-1}x$ dans Ξ, on voit que ξ s'envoie sur w par l'application précédente. Cela prouve que l'application $\xi \mapsto w$ est un isomorphisme de Ξ sur $Fix^G(\mu)$. Posons $r = r[d]$. Alors ad_r est un isomorphisme de $\Xi[d]$ sur Ξ. par composition, on obtient un isomorphisme de $\Xi[d]$ sur $Fix^G(\mu)$. Pour étudier les actions galoisiennes, on doit se rappeler que, par définition de D_F, $\omega_{\bar{G}}$ coïncide avec le cocycle $\omega_{\eta[d]}$ calculé comme en 1.2 à l'aide de la paire de Borel $(ad_{r^{-1}}(B^*), ad_{r^{-1}}(T^*))$. En reprenant les définitions de 1.2, on voit que cela se traduit par la propriété suivante :

(8) pour tout $\sigma \in \Gamma_F$, il existe $\bar{g}(\sigma) \in \bar{G}$ tel que $\bar{g}(\sigma)r\sigma(r)^{-1}u_{\mathcal{E}^*}(\sigma)^{-1}$ normalise T^* et s'envoie sur l'élément $\omega_{\bar{G}}(\sigma) \in W$.

Soient $\sigma \in \Gamma_F$ et $\xi[d] \in \Xi[d]$. L'élément $\xi[d]$ s'envoie par ad_r sur un élément $\xi \in \Xi$, que l'on relève comme ci-dessus en un élément $x \in Z_G(\eta)$, qui s'envoie sur un élément $w \in Fix^G(\mu)$. L'élément $\sigma(\xi[d])$ s'envoie par ad_r sur un élément $\xi' \in \Xi$, que l'on relève en un élément $x' \in Z_G(\eta)$, qui s'envoie sur un élément $w' \in Fix^G(\mu)$. Relevons $\xi[d]$ en l'élément $ad_{r^{-1}}(x)$. Alors ξ' est l'image dans Ξ de l'élément $ad_r \circ \sigma \circ ad_{r^{-1}}(x) = ad_{r\sigma(r)^{-1}} \circ \sigma(x)$. La conjugaison par $\bar{G}$ conserve $Z_G(\eta)$ et se quotiente en l'identité de Ξ. Donc ξ' est aussi l'image dans Ξ de l'élément $x'' = ad_{\bar{g}(\sigma)r\sigma(r)^{-1}} \circ \sigma(x)$. On a

$$(9) \qquad x'' = ad_{\bar{g}(\sigma)r\sigma(r)^{-1}u_{\mathcal{E}^*}(\sigma)^{-1}} \circ ad_{u_{\mathcal{E}^*}(\sigma)} \circ \sigma(x).$$

L'élément x normalise T^*. Les automorphismes $ad_{\bar{g}(\sigma)r\sigma(r)^{-1}u_{\mathcal{E}^*}(\sigma)^{-1}}$ et $ad_{u_{\mathcal{E}^*}(\sigma)} \circ \sigma$ aussi. Il en résulte que x'' normalise T^*. Puisque x' et x'' relèvent tous deux ξ', x'' se déduit de x par multiplication à gauche par un élément du normalisateur de T^* dans I_η. L'image w'' de x'' dans W se déduit de l'image w' de x' par multiplication à gauche par un élément de $W(\mu)$. D'après (8) et (9), on a $w'' = \omega_{\bar{G}}(\sigma) \circ \sigma_{G^*}(w) = \sigma_{\bar{G}}(w)$. Cela implique que $w'' \in Fix^G(\mu)$. Puisque w' et w'' sont deux éléments de cet ensemble qui se déduisent l'un de l'autre par multiplication à gauche par un élément de $W(\mu)$, ils sont égaux (parce que les éléments de $Fix^G(\mu)$ conservent $\Sigma_+(\mu)$). On obtient $w' = w'' = \sigma_{\bar{G}}(w)$. Mais cela prouve que l'isomorphisme de $\Xi[d]$ sur $Fix^G(\mu)$ entrelace l'action galoisienne naturelle sur $\Xi[d]$ avec l'action $\sigma \mapsto \sigma_{\bar{G}}$ sur $Fix^G(\mu)$. Cela achève la preuve de (7) et de (4).

En utilisant (4), l'égalité (3) se récrit

$$I^{\tilde{G}}(\underline{A}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(V,\mu,\omega_{\bar{G}},\omega), f) = \sum_{\mathcal{C}\in Cl(\mathcal{O})} I^{\tilde{G}}(A^{\tilde{G}}(V,\mathcal{C},\omega), f).$$

D'après la définition de 1.9, le membre de droite ci-dessus est égal à celui de l'égalité (1). Cela prouve cette égalité et cela achève la preuve du théorème 3.3.

9 Preuve du théorème [VI] 5.6

9.1 Rappel de l'énoncé du théorème

On rappelle brièvement l'énoncé du théorème [VI] 5.6, en renvoyant à cette référence pour plus de détails. On considère un triplet endoscopique non standard (G_1, G_2, j_*) défini sur F. Pour $i = 1, 2$, on fixe une paire de Borel (B_i, T_i) de G_i définie sur F. On note Σ_i l'ensemble des racines de T_i dans $\mathfrak{g}_i$. Le terme j_* est un isomorphisme de $X_*(T_1) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ sur $X_*(T_2) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$. Il y a une bijection $\tau : \Sigma_2 \to \Sigma_1$ et une fonction $b : \Sigma_2 \to \mathbb{Q}_{>0}$ de sorte que, pour tout $\alpha_2 \in \Sigma_2$, on ait l'égalité $j_*(\check{\alpha}_1) = b(\alpha_2)\check{\alpha}_2$, où $\alpha_1 = \tau(\alpha_2)$ et $\check{\alpha}_i$ est la coracine associée à α_i.

Pour toute place v de F, on a un isomorphisme

$$(1) \qquad D^{st}_{géom}(\mathfrak{g}_1(F_v)) \otimes Mes(G_1(F_v))^* \simeq D^{st}_{géom}(\mathfrak{g}_2(F_v)) \otimes Mes(G_2(F_v))^*$$

qui se restreint en un isomorphisme analogue pour les distributions à support nilpotent. Par l'exponentielle, il s'en déduit un isomorphisme

$$(2) \qquad D^{st}_{unip}(G_1(F_v)) \otimes Mes(G_1(F_v))^* \simeq D^{st}_{unip}(G_2(F_v)) \otimes Mes(G_2(F_v))^*.$$

On fixe un ensemble fini de places V de sorte que

- V contient les places archimédiennes de F ;

- G_1 et G_2 sont non ramifiés hors de V ;

- pour $v \notin V$, notons p la caractéristique résiduelle de F_v et $e_v = [F_v : \mathbb{Q}_p]$; alors $p > e_v N(G_i) + 1$ pour $i = 1, 2$, où $N(G_i)$ est l'entier défini en [W1] 4.3 ;

- les valeurs de la fonction b sont des unités hors de V.

Théorème. *Sous ces hypothèses, les distributions $SA^{G_1}_{unip}(V)$ et $SA^{G_2}_{unip}(V)$ se correspondent par le produit tensoriel sur les $v \in V$ des isomorphismes (2) ci-dessus.*

Pour simplifier, on note encore j_* toute application déduite de l'application j_* primitive. Par exemple, on note j_* les isomorphismes (1) et (2). Pour $i = 1, 2$, on pose $M_{i,0} = T_i$. On a un isomorphisme $j_* : \mathfrak{A}_{M_{1,0}} \simeq \mathfrak{A}_{M_{2,0}}$. On fixe des mesures sur ces espaces qui se correspondent par cet isomorphisme. On se débarrasse des espaces de mesures comme dans les paragraphes précédents. C'est-à-dire que, en une place $v \notin V$, on utilise les mesures canoniques. Pour $i = 1, 2$, on munit $G_i(\mathbb{A})$ de la mesure de Tamagawa, cf. 4.1. De ces choix se déduit une mesure sur $G_i(F_V)$. Pour des Levi $M_1 \in \mathcal{L}(M_{1,0})$ et $M_2 \in \mathcal{L}(M_{2,0})$ qui se correspondent, on fait des choix analogues.

9.2 Le lemme fondamental pondéré non standard

Dans ce paragraphe et le suivant, on fixe une place $v \notin V$ et **on considère que le corps de base est** F_v. Pour $i = 1, 2$, soit $M_i \in \mathcal{L}(M_{i,0})$. On a défini en [II] 4.2 une fonction sur $D^{st}_{géom}(M_i(F_v))$. Dans la situation générale de cette référence, elle était notée $s^{\tilde{G}_i}_{\tilde{M}_i}(., \tilde{K}_i)$. Elle ne dépendait que de la classe de conjugaison par $G_{i,AD}(F_v)$ du sous-espace hyperspécial $\tilde{K}_i$. Ici, la situation n'est pas tordue, on prend $\tilde{K}_i = K_i$ et la classe de conjugaison par $G_{i,AD}(F_v)$ de ce groupe est uniquement déterminée. On peut donc noter simplement $s^{G_i}_{M_i}$ notre fonction.

Supposons que M_1 et M_2 se correspondent. On a défini en [III] 6.5 une constante $c_{M_1,M_2}^{G_1,G_2} \in \mathbb{C}^\times$.

Proposition. *Soit $\boldsymbol{\delta}_1 \in D_{géom}^{st}(M_1(F_v))$. Supposons que son support est assez voisin de l'origine. Alors on a l'égalité*

$$s_{M_1}^{G_1}(\boldsymbol{\delta}_1) = c_{M_1,M_2}^{G_1,G_2} s_{M_2}^{G_2}(j_*(\boldsymbol{\delta}_1)).$$

Preuve. Pour $i = 1, 2$, il y a une analogue $s_{\mathfrak{m}_i}^{\mathfrak{g}_i}$ de la fonction $s_{M_i}^{G_i}$, définie sur $D_{géom}^{st}(\mathfrak{m}_i(F_v))$. Pour $d_1 \in D_{géom}^{st}(\mathfrak{m}_1(F_v))$ à support régulier dans $\mathfrak{g}_1(F_v)$, on a l'égalité

$$s_{\mathfrak{m}_1}^{\mathfrak{g}_1}(d_1) = c_{M_1,M_2}^{G_1,G_2} s_{\mathfrak{m}_2}^{\mathfrak{g}_2}(j_*(d_1)).$$

Cette égalité est la conjecture 3.7 de [W2]. Une preuve est annoncée par Chaudouard et Laumon ([CL]).

Pour $d_i \in D_{géom}^{st}(\mathfrak{m}_i(F_v))$ à support assez voisin de l'origine, on peut définir $exp(d_i) \in D_{géom}^{st}(G_i(F_v))$. Il résulte des définitions que l'on a l'égalité $s_{M_i}^{G_i}(exp(d_i)) = s_{\mathfrak{m}_i}^{\mathfrak{g}_i}(d_i)$. Pour $\boldsymbol{\delta}_1 \in D_{géom}^{st}(M_1(F_v))$ à support régulier dans $G_1(F_v)$ et assez voisin de l'origine, il existe $d_1 \in D_{géom}^{st}(\mathfrak{m}_1(F_v))$ à support régulier dans $\mathfrak{g}_1(F_v)$ et assez voisin de l'origine de sorte que $\boldsymbol{\delta}_1 = exp(d_1)$. Les considérations ci-dessus entraînent l'égalité de l'énoncé pour un tel $\boldsymbol{\delta}_1$.

Il reste à lever l'hypothèse que le support de $\boldsymbol{\delta}_1$ est régulier dans $G_1(F_v)$. Cela se fait en deux temps comme dans la section 4 de [II]. Considérons d'abord une classe de conjugaison stable semi-simple $\mathcal{O} \subset M_1(F_v)$ qui est G_1-équisingulière et assez proche de l'origine. Soit $\boldsymbol{\delta}_1 \in D_{géom}^{st}(\mathcal{O})$, c'est-à-dire que son support est formé d'éléments dont la partie semi-simple appartient à $\mathcal{O}$. D'après le lemme [II] 2.2, on peut fixer $\boldsymbol{\delta}'_1 \in D_{géom}^{st}(M_1(F_v))$, à support régulier dans $G_1(F_v)$ aussi voisin qu'on le veut de $\mathcal{O}$, de sorte que $\boldsymbol{\delta}_1 = g_{M_1}^{M_1}(\boldsymbol{\delta}'_1)$. D'après la proposition [III] 6.7, on a l'égalité $j_*(\boldsymbol{\delta}_1) = g_{M_2}^{M_2} \circ j_*(\boldsymbol{\delta}'_1)$. D'après la relation [II] 4.5(2), on a les égalités

$$s_{M_1}^{G_1}(\boldsymbol{\delta}'_1) = s_{M_1}^{G_1}(g_{M_1}^{M_1}(\boldsymbol{\delta}'_1)) = s_{M_1}^{G_1}(\boldsymbol{\delta}_1),$$

$$s_{M_2}^{G_2}(j_*(\boldsymbol{\delta}'_1)) = s_{M_2}^{G_2}(g_{M_2}^{M_2} \circ j_*(\boldsymbol{\delta}'_1)) = s_{M_2}^{G_2}(j_*(\boldsymbol{\delta}_1)).$$

L'égalité de l'énoncé déjà prouvée pour $\boldsymbol{\delta}'_1$ entraîne alors l'égalité analogue pour $\boldsymbol{\delta}_1$.

Soit maintenant $\boldsymbol{\delta}_1$ soumis à la seule restriction que son support est assez voisin de l'origine. Posons $\boldsymbol{\delta}_2 = j_*(\boldsymbol{\delta}_1)$. Pour $i = 1, 2$, on introduit une variable $a_i \in A_{M_i}(F_v)$ en position générale et proche de 1. D'après [II] 4.7, le germe en 1 de la fonction $a_i \mapsto s_{M_i}^{G_i}(a_i\boldsymbol{\delta}_i)$ est équivalent à un élément de l'espace $U_{M_i}^{G_i}$ dont le terme constant est égal à $s_{M_i}^{G_i}(\boldsymbol{\delta}_i)$ (cf. [II] 4.6 pour les définitions). Considérons l'application qui, à une fonction φ de a_2, associe la fonction $a_1 \mapsto \varphi(j_*(a_1))$. Les considérations de [III] 6.5 et l'hypothèse $v \notin V$ entraînent que cette application respecte l'équivalence. Elle envoie $U_{M_2}^{G_2}$ sur $U_{M_1}^{G_1}$ et sa restriction à $U_{M_2}^{G_2}$ commute à l'application "terme constant". Il en résulte que le germe en 1 de la fonction $a_1 \mapsto s_{M_2}^{G_2}(j_*(a_1)\boldsymbol{\delta}_2)$ est équivalent à un élément de l'espace $U_{M_1}^{G_1}$ dont le terme constant est égal à $s_{M_2}^{G_2}(\boldsymbol{\delta}_2)$. Puisque $a_1\boldsymbol{\delta}_1$ est à support G_1-équisingulier, on a démontré l'égalité

$$s_{M_1}^{G_1}(a_1\boldsymbol{\delta}_1) = c_{M_1,M_2}^{G_1,G_2} s_{M_2}^{G_2}(j_*(a_1)\boldsymbol{\delta}_2).$$

Le germe de cette fonction en 1 est équivalent à un élément de $U_{M_1}^{G_1}$ et on a deux façons de calculer son terme constant : la première donne $s_{M_1}^{G_1}(\boldsymbol{\delta}_1)$; la seconde donne $c_{M_1,M_2}^{G_1,G_2} s_{M_2}^{G_2}(\boldsymbol{\delta}_2)$. D'où l'égalité de ces deux termes, ce qui achève la démonstration. □

9.3 Extension aux Levi

Pour $i = 1, 2$, soient M_i et L_i deux Levi de G_i tels que $M_{i,0} \subset M_i \subset L_i$. Les définitions de [II] 4.2 se simplifient comme dans le paragraphe précédent : on a une fonction $s_{M_i}^{L_i}$ sur $D_{géom}^{st}(M_i(F_v))$. On suppose que M_1 et M_2, resp. L_1 et L_2, se correspondent.

On note comme toujours $L_{i,SC}$ le revêtement simplement connexe de L_i et on note $M_{i,sc}$, resp. $T_{i,sc}$, l'image réciproque de M_i, resp. T_i, dans $L_{i,SC}$. De j_* se déduit un isomomorphisme $j_{*,sc} : X_*(T_{1,sc}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \to X_*(T_{2,sc}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$. Le triplet $(L_{1,SC}, L_{2,SC}, j_{*,sc})$ est encore endoscopique non standard.

On a défini en [III] 3.5 un homomorphisme surjectif $\iota_{M_{i,sc},M_i}^* : D_{unip}^{st}(M_{i,sc}(F_v)) \to D_{unip}^{st}(M_i(F_v))$.

Lemme. *(i) Pour $i = 1, 2$ et pour $\boldsymbol{\delta}_{i,sc} \in D_{unip}^{st}(M_{i,sc}(F_v))$, on a l'égalité*

$$s_{M_i}^{L_i}(\iota_{M_{i,sc},M_i}^*(\boldsymbol{\delta}_{i,sc})) = s_{M_{i,sc}}^{L_{i,SC}}(\boldsymbol{\delta}_{i,sc}).$$

(ii) Pour $\boldsymbol{\delta}_1 \in D_{unip}^{st}(M_1(F_v))$, on a l'égalité

$$s_{M_1}^{L_1}(\boldsymbol{\delta}_1) = c_{M_{1,sc},M_{2,sc}}^{L_{1,SC},L_{2,SC}} s_{M_2}^{L_2}(j_*(\boldsymbol{\delta}_1)).$$

Preuve de (i). Le temps de cette preuve, l'indice $i = 1, 2$ est fixé et on le supprime pour simplifier. Rappelons que les fonctions s_M^L et $s_{M_{sc}}^{L_{SC}}$ sont déduites de fonctions primitives $r_M^L(., K^L)$ et $r_{M_{sc}}^{L_{SC}}(., K_{sc}^L)$ qui calculent les intégrales orbitales pondérées non-invariantes des fonctions caractéristiques des compacts K^L et K_{sc}^L. Fixons un ensemble de représentants $\mathcal{U}$ de l'ensemble de doubles classes $Z(L)^0(F_v)\backslash M(F_v)/\pi(M_{sc}(F_v))$. Soit $\boldsymbol{\gamma}_{sc} \in D_{unip}(M_{sc}(F_v))$. Posons $\boldsymbol{\gamma}'_{sc} = |\mathcal{U}|^{-1} \sum_{u \in \mathcal{U}} ad_u(\boldsymbol{\gamma}_{sc})$. Il résulte du lemme [III] 3.3 que l'on a l'égalité

$$r_M^L(\iota_{M_{sc},M}^*(\boldsymbol{\gamma}_{sc}), K^L) = r_{M_{sc}}^{L_{SC}}(\boldsymbol{\gamma}'_{sc}, K_{sc}^L).$$

Remarque. Dans le lemme cité apparaissaient des espaces de mesures que l'on a ici fait disparaître. En utilisant la preuve du lemme 4.2 du présent article, on montre que cette disparition est légitime compte tenu de nos choix de mesures canoniques.

Une distribution stable est invariante par l'action du groupe adjoint. Pour $\boldsymbol{\delta}_{sc} \in D_{unip}^{st}(M_{sc}(F_v))$, on a donc $\boldsymbol{\delta}'_{sc} = \boldsymbol{\delta}_{sc}$ et l'égalité se simplifie en

$$r_M^L(\iota_{M_{sc},M}^*(\boldsymbol{\delta}_{sc}), K^L) = r_{M_{sc}}^{L_{SC}}(\boldsymbol{\delta}_{sc}, K_{sc}^L).$$

Cette égalité se propage alors aux fonctions s_M^L et $s_{M_{sc}}^{L_{SC}}$ par la même preuve qu'en [III] 3.6. Cela prouve le (i) de l'énoncé.

Preuve de (ii). Le triplet $(L_{1,SC}, L_{2,SC}, j_{*,sc})$ étant endoscopique non standard, la proposition 8.2 fournit l'égalité

$$s_{M_{1,sc}}^{L_{1,SC}}(\boldsymbol{\delta}_{1,sc}) = c_{M_{1,sc},M_{2,sc}}^{L_{1,SC},L_{2,SC}} s_{M_{2,sc}}^{L_{2,SC}}(j_{*,sc}(\boldsymbol{\delta}_{1,sc}))$$

pour tout $\boldsymbol{\delta}_{1,sc} \in D^{st}_{unip}(M_{1,sc}(F_v))$. En utilisant (i), on obtient

$$s^{L_1}_{M_1}(\iota^*_{M_{1,sc},M_1}(\boldsymbol{\delta}_{1,sc})) = c^{L_{1,SC},L_{2,SC}}_{M_{1,sc},M_{2,sc}} s^{L_2}_{M_2}(\iota^*_{M_{2,sc},M_2} \circ j_{*,sc}(\boldsymbol{\delta}_{1,sc})).$$

Evidemment, $\iota^*_{M_{2,sc},M_2} \circ j_{*,sc} = j_* \circ \iota^*_{M_{1,sc},M_1}$. Puisque tout élément $\boldsymbol{\delta}_1 \in D^{st}_{unip}(M_1(F_v))$ peut s'écrire sous la forme $\boldsymbol{\delta}_1 = \iota^*_{M_{1,sc},M_1}(\boldsymbol{\delta}_{1,sc})$, on en déduit le (ii) de l'énoncé. $\square$

9.4 Globalisation

On revient à notre corps de base F. Soit U un ensemble fini de places de F disjoint de V et non vide. Pour $i = 1,2$, soit $M_i \in \mathcal{L}(M_{i,0})$. Comme en 9.2, les constructions du paragraphe 2.2 se simplifient dans notre situation et donnent naissance à une fonction que l'on note $s^{G_i}_{M_i,U}$ sur $D^{st}_{géom}(M_i(F_U))$. Supposons que M_1 et M_2 se correspondent. On définit une constante $c^{G_1,G_2}_{M_1,M_2}$ de la même façon qu'en [III] 6.5, en y remplaçant le corps de base local de cette référence par notre corps F. Rappelons la définition. Soit $n \geq 1$ un entier tel que nj_* envoie $X_*(T_1)$ dans $X_*(T_2)$. L'homomorphisme dual de nj_* envoie $X^*(T_2)$ dans $X^*(T_1)$. Il s'identifie à un homomorphisme de $X_*(\hat{T}_2)$ dans $X_*(\hat{T}_1)$, qui définit un homomorphisme de $\hat{T}_2$ dans $\hat{T}_1$. Celui-ci se restreint en un homomorphisme

$$\hat{j}_n : Z(\hat{M}_2)^{\Gamma_F} \to Z(\hat{M}_1)^{\Gamma_F}$$

qui est surjectif et de noyau fini. On pose

$$c^{G_1,G_2}_{M_1,M_2} = n^{-a_{M_2}}|ker(\hat{j}_n)|,$$

où $a_{M_2} = dim(A_{M_2}) = dim(A_{M_1})$. Cela ne dépend pas du choix de n.

Proposition. *Soit $\boldsymbol{\delta}_1 \in D^{st}_{unip}(M_1(F_U))$. On a l'égalité*

$$s^{G_1}_{M_1,U}(\boldsymbol{\delta}_1) = c^{G_1,G_2}_{M_1,M_2} s^{G_2}_{M_2,U}(j_*(\boldsymbol{\delta}_1)).$$

Preuve. On peut supposer $\boldsymbol{\delta}_1 = \otimes_{v\in U}\boldsymbol{\delta}_{1,v}$. On a écrit en 2.2 la formule de décomposition

$$(1) \qquad s^{G_1}_{M_1,U}(\boldsymbol{\delta}_1) = \sum_{L^U_1 \in \mathcal{L}(M_{1,U})} e^{G_1}_{M_{1,U}}(M_1, L^U_1) \prod_{v\in U} s^{L^v_1}_{M_{1,v}}(\boldsymbol{\delta}_{1,v}),$$

Pour tout $L^U_1 \in \mathcal{L}(M_{1,U})$ et tout $v \in U$, notons L^v_2 l'élément de $\mathcal{L}(M_{2,v})$ qui correspond à L^v_1. Le lemme 9.3(ii) entraîne l'égalité

$$s^{L^v_1}_{M_{1,v}}(\boldsymbol{\delta}_{1,v}) = c^{L^v_{1,SC},L^v_{2,SC}}_{M_{1,v,sc},M_{2,v,sc}} s^{L^v_2}_{M_{2,v}}(j_*(\boldsymbol{\delta}_{1,v})).$$

Posons $L^U_2 = (L^v_2)_{v\in U}$. Cette famille est un élément de $\mathcal{L}(M_{2,U})$. On prouvera ci-dessous l'égalité

$$(2) \qquad e^{G_1}_{M_{1,U}}(M_1, L^U_1) \prod_{v\in U} c^{L^v_{1,SC},L^v_{2,SC}}_{M_{1,v,sc},M_{2,v,sc}} = c^{G_1,G_2}_{M_1,M_2} e^{G_2}_{M_{2,U}}(M_2, L^U_2).$$

Admettons-la. La formule (1) se transforme en

$$s^{G_1}_{M_1,U}(\boldsymbol{\delta}_1) = c^{G_1,G_2}_{M_1,M_2} \sum_{L^U_1 \in \mathcal{L}(M_{1,U})} e^{G_2}_{M_{2,U}}(M_2, L^U_2) \prod_{v\in U} s^{L^v_2}_{M_{2,v}}(j_*(\boldsymbol{\delta}_{1,v})).$$

L'application $L_1^U \mapsto L_2^U$ est une bijection de $\mathcal{L}(M_{1,U})$ sur $\mathcal{L}(M_{2,U})$. On peut remplacer la somme en L_1^U ci-dessus par une somme en $L_2^U \in \mathcal{L}(M_{2,U})$. Grâce à la formule similaire à (1), le membre de droite ci-dessus est égal à

$$c_{M_1,M_2}^{G_1,G_2} s_{M_2,U}^{G_2}(j_*(\boldsymbol{\delta}_1)),$$

ce qui démontre l'égalité de l'énoncé.

Il reste à prouver (2). D'après la définition de [VI] 4.2, on a pour $i = 1, 2$ l'égalité

$$e_{M_{i,U}}^{G_i}(M_i, L_i^U) = d_{M_{i,U}}^{G_i}(M_i, L_i^U) k_{M_{i,U}}^{G_i}(M_i, L_i^U)^{-1}.$$

Le terme $d_{M_{i,U}}^{G_i}(M_i, L_i^U)$ est le rapport entre deux mesures sur l'espace $\mathcal{A}_{M_{i,U}}^{G_i}$, cf. [VI] 1.4. Il résulte de nos définitions que les espaces et mesures ne dépendent pas de l'indice i. Donc

$$d_{M_{1,U}}^{G_1}(M_1, L_1^U) = d_{M_{2,U}}^{G_2}(M_2, L_2^U).$$

Il suffit donc de prouver l'égalité

$$(3) \qquad k_{M_{2,U}}^{G_2}(M_2, L_2^U) \prod_{v \in U} c_{M_{1,v,sc},M_{2,v,sc}}^{L_{1,SC}^v,L_{2,SC}^v} = c_{M_1,M_2}^{G_1,G_2} k_{M_{1,U}}^{G_1}(M_1, L_1^U).$$

Fixons un entier n comme au début du paragraphe. L'application $\hat{j}_n$ a des avatars locaux $\hat{j}_{n,v}$. Considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccc} Z(\hat{M}_2)^{\Gamma_F} & \stackrel{\hat{j}_n}{\rightarrow} & Z(\hat{M}_1)^{\Gamma_F} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \prod_{v \in V} Z(\hat{M}_{2,v})^{\Gamma_{F_v}}/Z(\hat{L}_2^v)^{\Gamma_{F_v}} & \stackrel{\prod_{v\in U} \hat{j}_{n,v}}{\rightarrow} & \prod_{v \in V} Z(\hat{M}_{1,v})^{\Gamma_{F_v}}/Z(\hat{L}_1^v)^{\Gamma_{F_v}} \end{array}$$

Les flèches verticales sont les homomorphismes naturels. Le diagramme est commutatif. Tous les homomorphismes sont surjectifs, de noyaux finis. Il résulte des définitions que

- $k_{M_{2,U}}^{G_2}(M_2, L_2^U)$ est le nombre d'éléments du noyau de la flèche verticale de gauche ;

- $k_{M_{1,U}}^{G_1}(M_1, L_1^U)$ est le nombre d'éléments du noyau de la flèche verticale de droite ;

- $c_{M_1,M_2}^{G_1,G_2}$ est le nombre d'éléments du noyau de la flèche horizontale du haut, multiplié par $n^{-a_{M_2}}$;

- $\prod_{v \in U} c_{M_{1,v,sc},M_{2,v,sc}}^{L_{1,SC}^v,L_{2,SC}^v}$ est le nombre d'éléments de la flèche horizontale de droite, multiplié par $\prod_{v \in U} n^{-a_{M_{2,v}}+a_{L_2^v}}$.

En utilisant le chemin sud-ouest du diagramme, on voit que le membre de gauche de (3) est le nombre d'éléments du noyau de la flèche composée, multiplié par $\prod_{v \in U} n^{-a_{M_{2,v}}+a_{L_2^v}}$. En utilisant le chemin nord-est, on voit que le membre de droite de (3) est le nombre d'éléments du même noyau, multiplié par $n^{-a_{M_2}}$. Parce que L_2^U appartient à $\mathcal{L}(M_{2,U})$, on vérifie l'égalité

$$a_{M_2} = \sum_{v \in U} a_{M_{2,v}} - a_{L_2^v}.$$

L'égalité (3) en résulte, ce qui achève la démonstration. $\square$

9.5 Généralisation du théorème 9.1

Soient $M_1 \in \mathcal{L}(M_{1,0})$ et $M_2 \in \mathcal{L}(M_{2,0})$ deux Levi qui se correspondent.

Proposition. *Supposons $M_1 \neq G_1$. Alors on a l'égalité*

$$c_{M_1,M_2}^{G_1,G_2} j_*(SA_{unip}^{M_1}(V)) = SA_{unip}^{M_2}(V).$$

Preuve. Comme en 9.3, de j_* se déduit un isomorphisme $j_{*,sc}$ tel que le triplet $(M_{1,SC}, M_{2,SC}, j_{*,sc})$ soit endoscopique non standard. Puisqu'on suppose $M_1 \neq G_1$, nos hypothèses de récurrence habituelles nous permettent d'appliquer le théorème 9.1 à ce triplet. Donc

$$j_{*,sc}(SA_{unip}^{M_{1,SC}}(V)) = SA_{unip}^{M_{2,SC}}(V).$$

Pour $i = 1, 2$, on a l'égalité

$$\tau'(M_i)^{-1} SA_{unip}^{M_i}(V) = \tau'(M_{i,SC})^{-1} \iota_{M_{i,SC},M_i}^* (SA_{unip}^{M_{i,SC}}(V))$$

d'après la proposition 4.6. Puisque $\iota_{M_{2,SC},M_2}^* \circ j_{*,sc} = j_* \circ \iota_{M_{1,SC},M_1}^*$, on obtient l'égalité

$$\frac{\tau'(M_2)\tau'(M_{1,SC})}{\tau'(M_1)\tau'(M_{2,SC})} j_*(SA_{unip}^{M_1}(V)) = SA_{unip}^{M_2}(V).$$

Il suffit de prouver l'égalité

$$(1) \qquad \frac{\tau'(M_2)\tau'(M_{1,SC})}{\tau'(M_1)\tau'(M_{2,SC})} = c_{M_1,M_2}^{G_1,G_2}.$$

Pour $i = 1, 2$, $M_{i,SC}$ est simplement connexe. On a déjà dit plusieurs fois que cela impliquait $\tau'(M_{i,SC}) = 1$. Par définition (cf. 4.1), on a

$$\tau'(M_i) = \tau(M_i) covol(\mathfrak{A}_{M_i,\mathbb{Z}})^{-1} = |\pi_0(Z(\hat{M}_i)^{\Gamma_F})||ker^1(F; Z(\hat{M}_i))|^{-1} covol(\mathfrak{A}_{M_i,\mathbb{Z}})^{-1}.$$

Le groupe $\hat{M}_i$ est un Levi du groupe $\hat{G}_i$ qui est adjoint. Il en résulte que $Z(\hat{M}_i)^{\Gamma_F}$ est connexe. D'autre part, on a $ker^1(F; Z(\hat{M}_i)) \simeq ker^1(F; Z(\hat{G}_i))$ d'après le lemme [VI] 6.1. Le nombre d'éléments de ce groupe est égal à $\tau(G_i)|\pi_0(Z(\hat{G}_i)^{\Gamma_F})|^{-1}$. Or ce nombre vaut 1 parce que G_i est simplement connexe. D'où $\tau'(M_i) = covol(\mathfrak{A}_{M_i,\mathbb{Z}})^{-1}$. Le membre de gauche de (1) est égal à

$$covol(\mathfrak{A}_{M_1,\mathbb{Z}}) covol(\mathfrak{A}_{M_2,\mathbb{Z}})^{-1}.$$

Rappelons que l'on a un isomorphisme $j_* = \mathfrak{A}_{M_1} \simeq \mathfrak{A}_{M_2}$ compatible aux mesures sur ces espaces. Donc

$$covol(\mathfrak{A}_{M_1,\mathbb{Z}}) = vol(\mathfrak{A}_{M_1}/\mathfrak{A}_{M_1,\mathbb{Z}}) = vol(\mathfrak{A}_{M_2}/j_*(\mathfrak{A}_{M_1,\mathbb{Z}})).$$

On note $covol(j_*(\mathfrak{A}_{M_1,\mathbb{Z}}))$ ce dernier volume. Les réseaux $j_*(\mathfrak{A}_{M_1,\mathbb{Z}})$ et $\mathfrak{A}_{M_2,\mathbb{Z}}$ sont commensurables. Choisissons un entier $n \geq 1$ tel que $nj_*(\mathfrak{A}_{M_1,\mathbb{Z}}) \subset \mathfrak{A}_{M_2,\mathbb{Z}}$. Alors

$$covol(j_*(\mathfrak{A}_{M_1,\mathbb{Z}})) = n^{-a_{M_2}} covol(nj_*(\mathfrak{A}_{M_1,\mathbb{Z}})) = n^{-a_{M_2}} [\mathfrak{A}_{M_2,\mathbb{Z}} : nj_*(\mathfrak{A}_{M_1,\mathbb{Z}})] covol(\mathfrak{A}_{M_2,\mathbb{Z}}).$$

On en déduit que le membre de gauche de (1) est égal à

$$(2) \qquad n^{-a_{M_2}} [\mathfrak{A}_{M_2,\mathbb{Z}} : nj_*(\mathfrak{A}_{M_1,\mathbb{Z}}].$$

Modifions l'hypothèse sur n en supposant que $nj_*(X_*(T_1)) \subset X_*(T_2)$. Comme on l'a dit en 9.4, on a alors un homomorphisme $\hat{j}_n : Z(\hat{M}_2)^{\Gamma_F} \to Z(\hat{M}_1)^{\Gamma_F}$. Puisqu'il s'agit de tores complexes, on a aussi un homomorphisme $\hat{j}_{*,n} : X_*(Z(\hat{M}_2))^{\Gamma_F} \to X_*(Z(\hat{M}_1))^{\Gamma_F}$. Le nombre d'éléments du noyau de $\hat{j}_n$ est égal à celui du conoyau de $\hat{j}_{*,n}$. La définition de 9.4 conduit donc à l'égalité

$$c^{G_1,G_2}_{M_1,M_2} = n^{-a_{M_2}}|coker(\hat{j}_{*,n})|.$$

Pour $i = 1, 2$, les groupes $X_*(Z(\hat{M}_i))$ et $X^*(M_i)$ sont isomorphes. L'homomorphisme $\hat{j}_{*,n}$ s'identifie à un homomorphisme $X^*(M_2)^{\Gamma_F} \to X^*(M_1)^{\Gamma_F}$ dont on déduit par dualité un homomorphisme $\mathfrak{A}_{M_1,\mathbb{Z}} \to \mathfrak{A}_{M_2,\mathbb{Z}}$. On voit que ce dernier n'est autre que nj_*. Il en résulte d'une part que n satisfait aussi l'hypothèse posée avant l'égalité (2), d'autre part que le conoyau de $\hat{j}_{*,n}$ a même nombre d'éléments que celui du conoyau de l'homomorphisme $nj_* : \mathfrak{A}_{M_1,\mathbb{Z}} \to \mathfrak{A}_{M_2,\mathbb{Z}}$. Donc $c^{G_1,G_2}_{M_1,M_2}$ est lui-aussi égal au terme (2), ce qui prouve (1) et la proposition. □

9.6 Extension de l'ensemble fini de places

Lemme. *Supposons qu'il existe un ensemble fini S de places de F contenant V tel que le théorème 9.1 soit vérifié pour cet ensemble S. Alors il l'est pour l'ensemble V.*

Preuve. On peut supposer $S \neq V$. On pose $U = S - V$. Soit $M_1 \in \mathcal{L}(M_{1,0})$. Comme en 2.3(3), on peut écrire

$$(1) \qquad SA^{M_1}_{unip}(S) = \sum_{\ell=1,\dots,n_{M_1}} Sk^{M_1}_{\ell,U} \otimes SA^{M_1}_{\ell,V},$$

avec des $Sk^{M_1}_{\ell,U} \in D^{st}_{unip}(M_1(F_U))$ et des $SA^{M_1}_{\ell,V} \in D^{st}_{unip}(M_1(F_V))$. En adaptant les notations, la proposition 2.3(ii) implique

$$(2) \qquad SA^{G_1}(V) = \sum_{M_1 \in \mathcal{L}(M_{1,0})} |W^{M_1}||W^{G_1}|^{-1} \sum_{\ell=1,\dots,n_{M_1}} s^{G_1}_{M_1,U}(Sk^{M_1}_{\ell,U})(SA^{M_1}_{\ell,V})^{G_1}.$$

Pour tout $M_1 \in \mathcal{L}(M_{1,0})$, notons $M_2 \in \mathcal{L}(M_{2,0})$ le Levi correspondant. Si $M_1 \neq G_1$, la proposition 9.5 appliquée à l'ensemble S dit que

$$c^{G_1,G_2}_{M_1,M_2} j_*(SA^{M_1}_{unip}(S)) = SA^{M_2}_{unip}(S).$$

Si $M_1 = G_1$, la constante $c^{G_1,G_2}_{G_1,G_2}$ vaut 1 et l'égalité ci-dessus reste valable d'après l'hypothèse de l'énoncé. On déduit alors de (1) l'égalité

$$SA^{M_2}_{unip}(S) = \sum_{\ell=1,\dots,n_{M_1}} Sk^{M_2}_{\ell,U} \otimes SA^{M_2}_{\ell,V},$$

où

$$(3) \qquad Sk^{M_2}_{\ell,U} = c^{G_1,G_2}_{M_1,M_2} j_*(Sk^{M_1}_{\ell,U})$$

et

$$(4) \qquad SA^{M_2}_{\ell,V} = j_*(SA^{M_1}_{\ell,V}).$$

De (4) se déduit l'égalité

$$(SA^{M_2}_{\ell,V})^{G_2} = j_*((SA^{M_1}_{\ell,V})^{G_1}).$$

De (3) et de la proposition 9.4 se déduit l'égalité

$$s^{G_1}_{M_2,U}(Sk^{M_2}_{\ell,U}) = s^{G_1}_{M_1,U}(Sk^{M_1}_{\ell,U}).$$

Le terme $SA^{G_2}(V)$ est calculé par une égalité similaire à (2). En utilisant les égalités ci-dessus, on voit que le terme de droite de cette égalité est égal à l'image par j_* de celui de (2). D'où l'égalité $SA^{G_2}(V) = j_*(SA^{G_1}(V))$. $\square$

9.7 Preuve du théorème 9.1

En [III] 6.3, on a attaché à notre triplet endoscopique non standard un triplet particulier $(G, \tilde{G}, \omega)$. En fait $\omega = 1$ et on le supprime des notations. On considère ce triplet et on fixe un élément $\mathcal{X} \in \mathbf{Stab}_{excep}(\tilde{G}(F))$, cf. 3.3. Le lemme 9.6 nous autorise à agrandir l'ensemble de places V. On peut donc supposer que V contient $S(\mathcal{X}, \tilde{K})$. On reprend maintenant la démonstration des sections 5 à 8 qui calcule la distribution $\underline{A}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(V, \mathcal{X})$. On a une première simplification car l'ensemble $Fib(\mathcal{X})$ de 5.1 est réduit à un élément. En effet, comme on l'a dit en 3.3, $\mathcal{X}$ correspond à un élément de $\mathcal{Z}(\tilde{G})^{\Gamma_F}$. Notons μ son image naturelle dans $(T^*/(1-\theta^*)(T^*)) \times \mathcal{Z}(\tilde{G})$. L'unique élément de $Fib(\mathcal{X})$ est $(\mu, 1)$. L'assertion du théorème 3.3 est donc équivalente à celle de la proposition 5.1. Comme on l'a noté en [III] 7.7, le groupe $\bar{G}$ associé à $(\mu, 1)$ comme en 1.1 est isomorphe au groupe G_1 de notre triplet endoscopique non standard. En particulier, il est simplement connexe.

La démonstration des sections 5 à 8 vaut jusqu'au point où on avait utilisé le théorème [VI] 5.6, c'est-à-dire jusqu'en 5.9. Au début de ce paragraphe, on a une donnée $\mathbf{H} \in E_{\hat{T}_{ad},\star}(\bar{G}_{SC}, V)$ et un triplet $(\mathbf{G}', \mu', \omega_{\bar{G}'}) \in \mathcal{J}(\mathbf{H})$. Il s'en déduit un triplet endoscopique non standard $(\bar{H}_{SC}, G'_{\epsilon,SC}, j_*)$. Si $N(\bar{H}_{SC}, G'_{\epsilon,SC}, j_*) < dim(G_{SC})$, nos hypothèses de récurrence nous permettent d'appliquer le théorème [VI] 5.6 à ce triplet et on a encore l'égalité 5.9(1), c'est-à-dire

$$(1) \qquad i(\tilde{G}, \tilde{G}', \mu', \omega_{\bar{G}'}) S^{\mathbf{G}'}(\underline{SA}^{\mathbf{G}'}(V, \mathcal{X}'), f^{\mathbf{G}'}) = C(\tilde{G})|W^{\bar{H}}| S^{\bar{H}_{SC}}(SA^{\bar{H}_{SC}}_{unip}(V), \bar{f}_{sc}).$$

Le lemme [III] 6.3 entraîne que l'on a en tout cas $N(\bar{H}_{SC}, G'_{\epsilon,SC}, j_*) \leq dim(G_{SC})$. Reste le cas où cette inégalité est une égalité. Dans ce cas, le lemme cité entraîne que la donnée $\mathbf{G}' = (G', \mathcal{G}', \tilde{s})$ est équivalente à la donnée maximale de $(G, \tilde{G})$. Puisque $\mathbf{G}'$ appartient à l'ensemble $\mathcal{E}_{\hat{T}}(\tilde{G}, V)$ défini en 5.1, on voit facilement qu'il n'y a qu'une telle donnée : on peut supposer $\tilde{s} = \hat{\theta}$ et $\mathcal{G}' = \hat{G}^{\hat{\theta}} \rtimes W_F$. La donnée $(\mu', \omega_{\bar{G}'})$ est elle-aussi unique : μ' est l'image naturelle de μ dans $\mathcal{Z}(\tilde{G}')$ et $\omega_{\bar{G}'} = 1$. Ces unicités impliquent celle de $\mathbf{H}$: c'est la donnée principale de $\bar{G}$, c'est-à-dire $\mathbf{H} = (\bar{G}, {}^L\bar{G}, 1)$. Supposons ces conditions vérifiées. Alors le triplet $(\bar{H}_{SC}, G'_{\epsilon,SC}, j_*)$ est égal à notre triplet de départ (G_1, G_2, j_*). Notons $f_1 = \bar{f}_{sc}$ et $f_2 = f_{\epsilon,sc}$ avec les notations de 5.8 et 5.9. On a $f_1 \in SI(G_1(F_V))$, $f_2 \in SI(G_2(F_V))$ et les fonctions $f_1 \circ exp$ et $f_2 \circ exp$ définies au voisinage de 0 dans les algèbres de Lie se correspondent par endoscopie non standard. On ne connaît pas l'égalité (1) mais on peut en tout cas écrire

$$i(\tilde{G}, \tilde{G}', \mu', \omega_{\bar{G}'}) S^{\mathbf{G}'}(\underline{SA}^{\mathbf{G}'}(V, \mathcal{X}'), f^{\mathbf{G}'}) = C(\tilde{G})|W^{\bar{H}}|(S^{\bar{H}_{SC}}\left(SA^{\bar{H}_{SC}}_{unip}(V), \bar{f}_{sc}) + X(f)\right),$$

où

$$(2)\qquad X(f)=S^{G_2}(SA^{G_2}_{unip}(V),f_2)-S^{G_1}(SA^{G_1}_{unip}(V),f_1).$$

Pour toutes les données $\mathbf{H}$ sauf la donnée maximale de $\bar{G}$, le calcul de 5.9 est donc valable. Pour la donnée maximale, la formule 5.9(2) doit être corrigée : on ajoute au membre de droite le terme $X(f)$ multiplié par une constante. Il est facile de calculer celle-ci : c'est $C(\tilde{G})$. Le calcul se poursuit et on obtient finalement non pas l'égalité 8.4(1), mais l'égalité

$$I^{\tilde{G}}(\underline{A}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(V,\mu,\omega_{\bar{G}}),f)=I^{\tilde{G}}(A^{\tilde{G}}(V,\mathcal{X}),f)+C(\tilde{G})X(f).$$

Comme on l'a dit ci-dessus, le membre de gauche est égal à $I^{\tilde{G}}(\underline{A}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(V,\mathcal{X}),f)$. D'après nos hypothèses de récurrence, le théorème [VI] 5.4 est connu pour $(G,\tilde{G})$. Comme on l'a vu en 3.6, l'égalité du théorème 3.3 est donc vérifiée. Cela entraîne l'égalité

$$I^{\tilde{G}}(\underline{A}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(V,\mu,\omega_{\bar{G}}),f)=I^{\tilde{G}}(A^{\tilde{G}}(V,\mathcal{X}),f).$$

Il en résulte que $X(f)=0$. Le même raisonnement qu'en [III] 7.7 montre que, pour tout $\varphi\in SI(G_1(F_V))$, il existe f tel que f_1 coïncide avec φ au voisinage de l'unité. L'égalité $X(f)=0$ pour tout f entraîne donc l'égalité voulue $j_*(SA^{G_1}_{unip}(V))=SA^{G_2}_{unip}(V)$. Cela prouve le théorème 9.1. $\square$

Bibliographie

[A1] J. Arthur : *A stable trace formula I. General expansions*, Journal of the Inst. of Math. Jussieu 1 (2002), p. 175-277

[A2] ——— : *A stable trace formula II. Global descent*, Inventiones Math. 143 (2001), p. 157-220

[CL] P.-H. Chaudouard, G. Laumon : *Le lemme fondamental pondéré I : constructions géométriques*, Compositio Math. 146 (2010), p. 1416-1506

[K1] R. Kottwitz : *Rational conjugacy classes in reductive groups*, Duke Math. J. 49 (1982), p. 785-806

[K2] ——— : *Stable trace formula : elliptic singular terms*, Math. Ann. 275 (1986), p. 365-399

[K3] ——— : *Stable trace formula : cuspidal tempered terms*, Duke Math. J. 51 (1984), p. 611-650

[KS] ———-, D. Shelstad : *Foundations of twisted endoscopy*, Astérisque 255 (1999)

[Lab1] J.-P. Labesse : *Nombres de Tamagawa des groupes réductifs quasi-connexes*, manuscripta math. 104 (2001), p. 407-430

[Lab2] ——— : *Cohomologie, stabilisation et changement de base*, Astérisque 257 (1999)

[Lab3] ——— : *Stable twisted trace formula : elliptic terms*, Journal of the Inst. of Math. Jussieu 3 (2004), p. 473-530

[Lan] R. P. Langlands : Stable conjugacy : definitions and lemmas, Can. J. Math. 31 (1979), p. 700-725

[LS] ———-, D. Shelstad : *On the definition of transfer factors*, Math. Ann. 278 (1987), p. 219-271

[Oe] J. Oesterlé : *Nombres de Tamagawa et groupes unipotents en caractéristique p*, Inventiones Math. 78 (1984), p. 13-88

[S] J.-L. Sansuc : *Groupe de Brauer et arithmétique des groupes algébriques linéaires sur un corps de nombres*, Journal für die r. und ang. Math. 327 (1981), p. 12-80

[W1] J.-L. Waldspurger : *L'endoscopie tordue n'est pas si tordue*, Memoirs AMS 908 (2008)

[W2] ———————— : *A propos du lemme fondamental pondéré tordu*, Math. Annalen 343 (2009), p. 103-174

[I], [II], [III], [V] ———————- : *Stabilisation de la formule des traces tordue I : endoscopie tordue sur un corps local, II : intégrales orbitales et endoscopie sur un corps local non-arhcimédien; définitions et énoncés des résultats, III : intégrales orbitales et endoscopie sur un corps local non-arhcimédien; réductions et preuves, V : intégrales orbitales et endoscopie sur le corps réel*, prépublications 2014

[VI] C. Moeglin, J.-L. Waldspurger : *Stabilisation de la formule des traces tordue VI : la partie géométrique de cette formule*, prépublication 2014

e-mail : jean-loup.waldspurger@imj-prg.fr